I) 1) Démontrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

2) Démontrer que pour tout entier n, $n \geq 1$:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

(2 + 6 = 8 pts)

II) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} - 2x$ et (C) la représentation graphique de f.

1) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) + x - \dfrac{1}{2} \right]$ et interpréter graphiquement ce résultat.

2) Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, puis prouver que (C) admet une asymptote oblique en $-\infty$ dont vous donnerez une équation.

(3 + 4 = 7 pts)

III) Soient a et b deux réels. On note f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = a \cdot \ln x + b \cdot x$ et (C) sa représentation graphique. Déterminer les réels a et b tels que la tangente à (C) au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = x - 2$.

(4 pts)

IV) Résoudre l'inéquation et l'équation suivantes :

1) $\ln \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x} \leq 1$ 2) $\ln x - 2\ln(x - 4) = -\ln 2$

(3 + 4 = 7 pts)

V) 1) Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=x^3-1+2\ln x$.

a) Dresser le tableau de variation de g (les limites ne sont pas demandées).

b) Calculer : g(1).

c) En déduire le signe de g(x).

2) Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x^2}$ et (C) sa représentation graphique.

a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite Δ d'équation : $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C).

c) Etudier la position de (C) par rapport à Δ.

d) Calculer $f'(x)$ et démontrer que l'on peut écrire : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$.

e) Dresser le tableau de variation de f.

((2 + 0,5 + 0,5) + (2 + 1 + 2 + 3 + 2) = 13 pts)

VI) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-3e^x-2+e^{-x}>0$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1-e^x}{3+e^{-x}}$.

Etudier le signe de $f'(x)$.

(4 + 4 = 8 pts)

VII) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=x+1+\dfrac{2e^x}{1-e^x}$ (C) sa représentation graphique.

1) Est-ce que (C) admet une asymptote horizontale ? Justifier.

2) Est-ce que (C) admet une asymptote verticale ? Justifier.

3) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$. Que peut-on en déduire pour (C) ?

4) Démontrer que la droite d'équation : $y = x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

5) Démontrer que f est impaire.

6) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

(2 + 2 + 2 + 1 + 3 + 3 = 13 pts)