EPREUVE ÉCRITE

Ministère de l'Education nationale
et de la Formation professionnelle

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES

Division technique générale

Section GE

BRANCHE : Mathématiques I

SESSION : mai-juin 2007 DATE : 24 mai 2007 DURÉE 2h15

Exercice 1 **9 points (6+3)**

1) Démontrez : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2) Démontrez : Pour tout entier n, $n \geq 1$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Exercice 2 **12 points (1+3+3+3+2)**

f est la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

C_f est sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1) Calculez la limite de f en $+\infty$.

2) Prouvez que la droite d d'équation $y = 3x + \dfrac{3}{2}$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.

3) Etudiez la dérivabilité de f en 1. Que peut-on en déduire graphiquement ?

4) Calculez $f'(x)$ pour x dans $]1;+\infty[$ et dressez le tableau de variations de f.

5) Tracez la courbe C_f.

Exercice 3 **12 points (4+6+2)**

1) Résolvez l'équation $2\ln x - \ln 5 = \ln(x+2)$.

2) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^x}$. Etudiez le signe de $f'(x)$.

3) Résolvez l'équation différentielle $3y' - 12y = 0$ et déterminez-en la solution f telle que $f(1) = e^4$.

Le commissaire du Gouvernement,

EDUCATION NATIONALE ET FORMATION PROFESSIONNELLE G.-D. DE LUXEMBOURG

Exercice 4 **15 points (3+0,5+1+2,5+3+2+3)**

1) g est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2x+3+2x\ln x$.

a) Dressez le tableau de variations de g. (les limites ne sont pas demandées)

b) Calculez les coordonnées de l'extremum.

c) Déduisez-en le signe de $g(x)$.

2) f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=(2x+3)\ln x$.

a) Calculez les limites de f aux bornes de $]0;+\infty[$ et indiquez les équations des asymptotes éventuelles parallèles aux axes.

b) Vérifiez que pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ et dressez le tableau de variations de f.

c) Montrez que l'équation $f(x)=10$ admet une solution unique dans $]0;+\infty[$. Trouvez un encadrement d'amplitude 10^{-1} de cette solution.

d) Tracez la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Exercice 5 **7 points (1+3+2+1)**

On note f la fonction définie par $f(x)=3x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{e^x}{e^x-1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Justifiez chacune des affirmations suivantes :

1) f est définie sur IR*,

2) f est une fonction impaire,

3) la droite d'équation $x=0$ est asymptote à C_f,

4) la droite d'équation $y=3x-\dfrac{1}{2}$ est asymptote à C_f.

Exercice 6 **5 points**

f est la fonction définie sur IR \ {2} par $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+3}{x-2}$ avec a et b réels. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Trouvez les réels a et b tels que :

- C_f passe par le point $A(1;-3)$
- C_f admet au point d'abscisse 1 une tangente de pente 2.

Le commissaire du Gouvernement

ÉDUCATION NATIONALE ET FORMATION PROFESSIONNELLE G.-D. DE LUXEMBOURG