MATHÉ I - Septembre 2007

II.

$f(x)=x+\sqrt{x^2-3x-4} \qquad I=]-\infty;-1]\cup[4;+\infty[$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)="-\infty+\infty"$ f.i.

$$f(x)=\frac{\cancel{x^2}\cancel{-x^2}+3x+4}{x-\sqrt{x^2-3x-4}}=\frac{\cancel{x}\left(3+\frac{4}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}\right)}\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\overbrace{\frac{4}{x}}^{\to 0}}{1+\sqrt{1\underbrace{-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}_{\to 0}}}=\frac{3}{2}$$

A.H. d'équation $y=\frac{3}{2}$ en $-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)="+\infty+\infty"=+\infty$

C_f admet une A.O. d'équation $y=2x-\frac{3}{2}$ en $+\infty$ ssi $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$

$$f(x)-y=\sqrt{x^2-3x-4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)=\frac{\cancel{x^2}\cancel{-3x}-4\cancel{-x^2}\cancel{+3x}-\frac{9}{4}}{\sqrt{x^2-3x-4}+\left(x-\frac{3}{2}\right)}=\frac{-25}{4\sqrt{x^2-3x-4}+(4x-6)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-25}{\underbrace{4\sqrt{x^2-3x-4}}_{\to+\infty}+\underbrace{(4x-6)}_{\to+\infty}}="\frac{-25}{+\infty}"=0\Rightarrow \text{A.O. en } +\infty.$$

c) f est dérivable en -1 ssi $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=a \qquad (a\in\mathbb{R})$

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\frac{x+\sqrt{x^2-3x-4}+1}{x+1}=\frac{(x+1)+\sqrt{(x+1)(x-4)}}{x+1}=1+\frac{\cancel{(x+1)}(x-4)}{\cancel{(x+1)}\sqrt{(x+1)(x-4)}}$$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\left[1+\frac{\overbrace{x-4}^{\to-5}}{\sqrt{\left(\underbrace{x+1}_{\to 0^-}\right)\left(\underbrace{x-4}_{\to-5}\right)}}\right]="1+\frac{-5}{0^+}"=-\infty$$

f n'est pas dérivable en -1

f est dérivable en 4 ssi $\lim\limits_{x\to4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=b \ (b\in\mathbb{R})$

$$\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\frac{x+\sqrt{x^2-3x-4}+1}{x-4}=\frac{(x-4)+\sqrt{(x+1)(x-4)}}{x-4}=1+\frac{\cancel{(x-4)}(x+1)}{\cancel{(x-4)}\sqrt{(x+1)(x-4)}}$$

$$\lim_{x\to4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to4^+}\left[1+\frac{\overbrace{x+1}^{\to5}}{\sqrt{\left(\underbrace{x+1}_{\to5}\right)\left(\underbrace{x-4}_{\to0^+}\right)}}\right]="1+\frac{5}{0^+}"=+\infty$$

f n'est pas dérivable en 4

III. 1)

$\ln(2-x)-\ln 3 \le 2\ln(2x+1)-\ln(5x+6)$

C.E. $\quad 2-x>0 \Leftrightarrow x<2 \qquad 2x+1>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2} \qquad 5x+6>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{6}{5}$

$E=\left]-\dfrac{1}{2};2\right[$

$\ln(2-x)+\ln(5x+6)\le \ln 3+\ln(2x+1)^2$

$\ln[(2-x)(5x+6)]\le \ln\left[3\left(4x^2+4x+1\right)\right]$

$10x+12-5x^2-6x\le 12x^2+12x+3$ car ln est strict. $\uparrow$

$-17x^2-8x+9\le 0 \quad \Delta=676\Rightarrow\sqrt{\Delta}=26 \qquad x=\dfrac{-8\pm 24}{34}\left\langle \begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=\dfrac{9}{17}\end{array}\right.$

$S_1=]-\infty;-1]\cup\left[\dfrac{9}{17};+\infty\right[\qquad S=S_1\cap E=\left[\dfrac{9}{17};2\right[$

2)

$2e^x+9-5e^{-x}>0 \quad \left|\cdot e^x\right. \quad \left(e^x>0\right)$

$2e^{2x}+9e^x-5>0 \quad e^x=y\ (y>0)$

$2y^2+9y-5>0 \quad \Delta=121\Rightarrow\sqrt{\Delta}=11$

$y=\dfrac{-9\pm 11}{4}\left\langle \begin{array}{l} y_1=-5 \\ y_2=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \qquad S_1=\underbrace{]-\infty;-5[}_{\text{à écarter}}\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

$y>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow e^x>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x>\ln\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x>-\ln 2 \qquad S=]-\ln 2;+\infty[$

3)

$3y'+9y=0\Leftrightarrow y'=-3y\Leftrightarrow y=ke^{-3x}$

$f(x)=ke^{-3x}$ et $f(0)=2\Leftrightarrow ke^0=2\Leftrightarrow k=2$

$f(x)=2e^{-3x}$

III. 1)

$g(x)=1-x^2-\ln x \quad I=]0;+\infty[$

a) $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)="1-0-(-\infty)"=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)="1-\infty-\infty"=-\infty$

b) $\quad g'(x)=-2x-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\overbrace{2x^2+1}^{>0}}{\underbrace{x}_{>0}}<0$

x	0		+∞
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

c) $g(1)=1-1-0=0$

x	0		1		+∞
$g(x)$	‖	+	0	$-$	

$f(x) = -x + e + \dfrac{\ln x}{x} \qquad I =]0;+\infty[$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = "0 + e + \dfrac{-\infty}{0^+}" = -\infty \qquad$ A.V. d'équation $x = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = "- +\infty + e + 0" = -\infty$

b) $f(x) = -x + e + \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$

La droite d d'équation $y = -x + e$ est une A.O. à C_f en $+\infty$

$$\delta(x) = \frac{\ln x}{\underbrace{x}_{>0}} \left\langle \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\rangle 0 \Leftrightarrow \ln x \left\langle \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\rangle 0 \Leftrightarrow x \left\langle \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\rangle 1 \quad (\text{car ln est strict. } \uparrow)$$

C_f est au-dessus de d sur $]1;+\infty[$

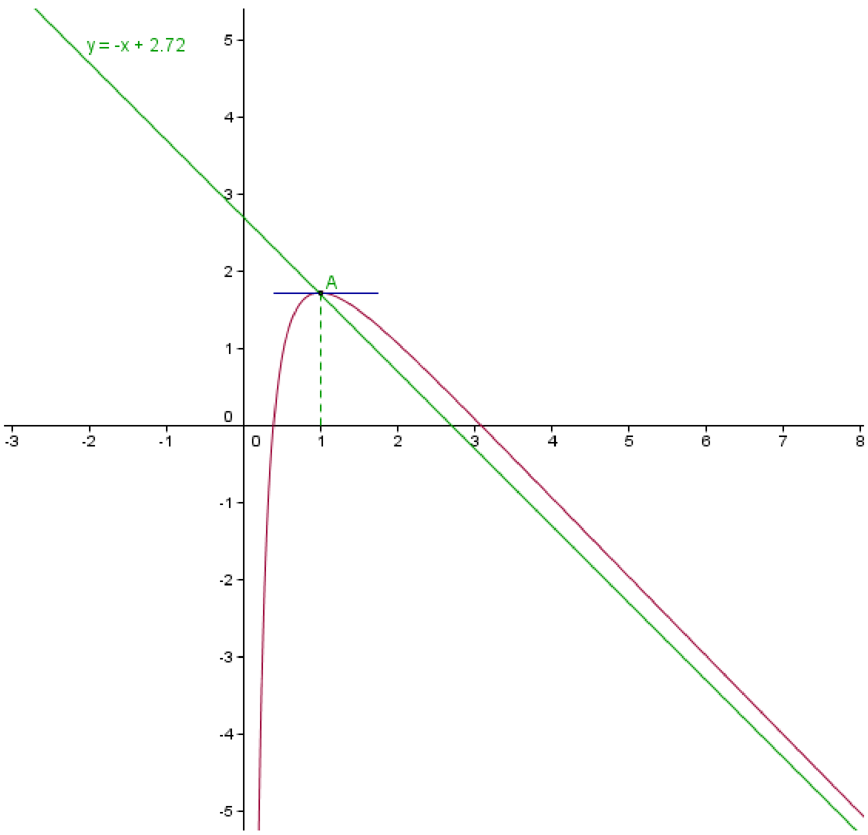
C_f coupe d en $x = 1$

C_f est en-dessous de d sur $]0;1[$

c) $f'(x) = -1 + \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = \dfrac{-x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{\underbrace{x^2}_{>0}}$

$f'(x)$ a le signe de $g(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$e-1 \approx 1,7$	$\searrow$	$-\infty$



$f(x) = 1-(2x+3)e^{-x}$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = "1-(-\infty)(+\infty)" = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = "1-(+\infty)\cdot 0"$ f.i.

V)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1-2\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{xe^{-x}}_{\to 0}\right)+3\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{e^{-x}}_{\to 0}\right) = 1$ (A.H. d'éq. $y=1$)

b) $f'(x) = -2e^{-x}+(2x+3)e^{-x} = (2x+1)\underbrace{e^{-x}}_{>0}$

$f'(x)$ a le signe de $2x+1$

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	min $1-2\sqrt{e}\approx-2{,}3$	$\nearrow$	1 $-\infty$

c) Sur $[-2;-1]$ f est continue, strict. $\downarrow$ et change de signe, car:

$f(-2) = 1+e^2 > 0$ et $f(-1) = 1-e < 0$.

L'équation $f(x)=0$ admet donc une solution unique $\alpha\in[-2;-1]$

$f(-1{,}3)\approx-0{,}468$ et $f(-1{,}4)\approx 0{,}189 \Leftrightarrow \alpha\in\,]-1{,}3;-1{,}4[$

d) $y = f'(0)(x-0)+f(0)$ $\quad f'(0) = 1\cdot 1 = 1$ $\quad f(0) = 1-3 = -2$

$y = x-2$

e)