Corrigé de l'épreuve de mathématiques I

Question I

voir cours !

15 sept. 08

Question II

1) $$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-2x}-(x-2)\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-2x)-(x-2)^2}{\sqrt{x^2-2x}+(x-2)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-x^2+4x-4}{\sqrt{x^2-2x}+(x-2)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{\sqrt{x^2-2x}+(x-2)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{2-\frac{4}{x}}^{\to 2}}{\underbrace{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1-\frac{2}{x}}_{\to 2}}\\ &= 1\end{aligned}$$

Donc : $A.H. : y = 1$ en $+\infty$.

2) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{\sqrt{x(x-2)}}{x-2}-1\right)\\ &= \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x(x-2)}{(x-2)\sqrt{x(x-2)}}-1\right)\\ &= \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{\overbrace{x}^{\to 2}}{\underbrace{\sqrt{x(x-2)}}_{\to 0^+}}-1\right)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Donc : f n'est pas dérivable en 2. $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse 2.

3) $\forall x \in]2;+\infty[: f'(x) = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} - 1$

$$= \frac{x-1-\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-2x}}$$

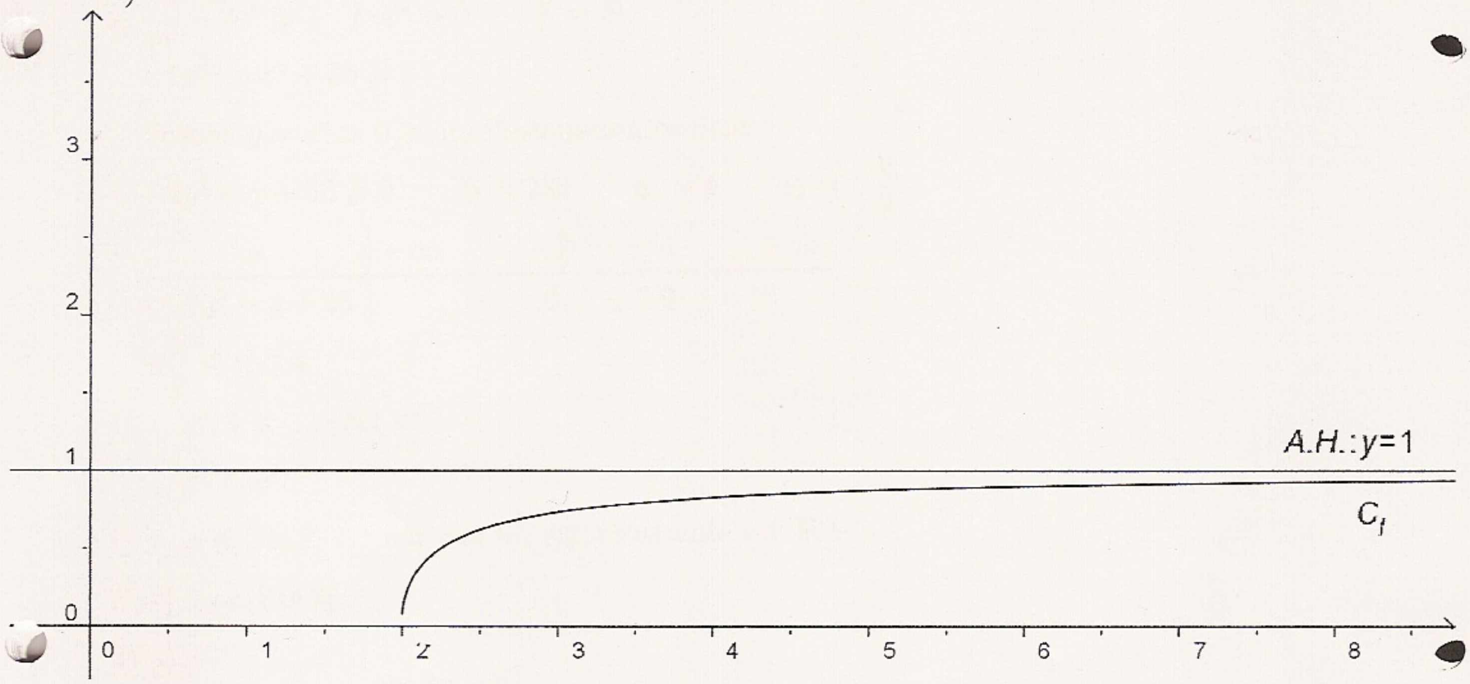
$$= \frac{(x-1)^2-(x^2-2x)}{[(x-1)+\sqrt{x^2-2x}]\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \frac{1}{[(x-1)+\sqrt{x^2-2x}]\sqrt{x^2-2x}} > 0$$

Tableau de variation :

x	2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	0	$\nearrow$	1

4)



Question III

1) $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \dfrac{1}{2}\ln x$

Conditions : (1) $2x-3>0$ (2) $6-x>0$ (3) $x>0$

$x > \dfrac{3}{2}$ $\quad$ $x<6$ $\quad$ $x>0$

$E = \left]\dfrac{3}{2};6\right[$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln(2x-3)+\frac{1}{2}\ln x &= \ln(6-x) \qquad |\cdot 2\\
\ln(2x-3)+\ln x &= \ln(6-x)^2\\
\ln[(2x-3)x] &= \ln(6-x)^2\\
2x^2-3x &= 36-12x+x^2 \qquad \text{car ln est str. croissante sur }]0;+\infty[\\
x^2+9x-36 &= 0 \qquad \Delta=225 \qquad x_1=-12\notin E \qquad x_2=3\in E
\end{aligned}
$$

$S=\{3\}$

2) $\dfrac{36}{e^x}-2e^x\geqslant 1 \quad |\cdot e^x>0 \qquad E=\mathbb{R}$

$-2e^{2x}-e^x+36\geqslant 0$

Posons $y=e^x>0$, alors l'inéquation devient :

$-2y^2-y+36\geqslant 0 \qquad \Delta=289 \qquad y_1=4 \qquad y_2=-\dfrac{9}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		4		$+\infty$
$-2y^2-y+36$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$-\dfrac{9}{2}\leqslant y\leqslant 4$

$e^x\leqslant 4 \qquad$ car $e^x>0$

$e^x\leqslant e^{\ln 4}$

$x\leqslant 2\ln 2 \qquad$ car exp est str. croissante sur $\mathbb{R}$

$S=]-\infty;2\ln 2]$

3) a)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x-0}{x-\frac{\pi}{6}}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x-0}{x-\frac{\pi}{6}} \qquad \text{posons } g(x)=\cos 3x \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ et } g\left(\frac{\pi}{6}\right)=0\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}} \qquad g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \text{ donc en } \frac{\pi}{6} \text{ et}\\
&= g'\left(\frac{\pi}{6}\right) \qquad \forall x\in\mathbb{R} : g'(x)=-3\sin 3x\\
&= -3
\end{aligned}
$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3\left(e^x-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{x^3e^x}_{\to 0}-\underbrace{x}_{\to-\infty}\right)=+\infty$

Question IV

$f(x) = ae^{2x} + be^{x} \qquad D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 2ae^{2x} + be^{x}$

$$f(1) = -\frac{e^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow ae^2 + be = -\frac{e^2}{2} \qquad | : e$$

$$\Leftrightarrow ae + b = -\frac{e}{2}$$

$$\Leftrightarrow ae + b = -\frac{e}{2} \qquad (1)$$

$$f'(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2ae^2 + be = 0 \qquad | : e$$

$$\Leftrightarrow 2ae + b = 0$$

$$\Leftrightarrow b = -2ae \qquad (2)$$

(2) dans (1) : $ae - 2ae = -\dfrac{e}{2}$

$$-ae = -\frac{e}{2}$$

$$a = \frac{1}{2} \qquad (1')$$

(1') dans (2) : $b = -e$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} - e \cdot e^{x} = \dfrac{1}{2}e^{2x} - e^{x+1}$

Question V

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\underbrace{-2x+3}_{\to 3} + \underbrace{\ln \frac{x}{x+1}}_{\to -\infty} \right) = -\infty \qquad A.V. : x = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\underbrace{-2x+3}_{\to -\infty} + \underbrace{\ln \frac{x}{x+1}}_{\to 0} \right) = -\infty \qquad$ pas d'A.H.

2) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} [f(x) - (-2x+3)] = \lim_{x\to +\infty} \underbrace{\ln \frac{x}{x+1}}_{\to 0} = 0$

Donc : $\Delta : y = -2x + 3$ est A.O. à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$

$\forall x \in]0; +\infty[: d(x) = \ln \dfrac{x}{x+1} < 0$, car $\dfrac{x}{x+1} < 1$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

x	0		$+\infty$
$d(x)$	$\|\|$	$-$	
Position		$\mathscr{C}_f$ est en dessous de l'A.O.	

3) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = -2 + \dfrac{1}{\dfrac{x}{x+1}} \cdot \dfrac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2}$

$$= -2 + \frac{1}{x(x+1)}$$

$$= \frac{-2x^2 - 2x + 1}{x(x+1)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = 12 \quad x_1 = \frac{-\sqrt{3}-1}{2} \approx -1,4 \text{ et } x_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0,4$$

Tableau de variation :

x	0		$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|\| -\infty$	$\nearrow$	$f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

$f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = -\sqrt{3} + 1 + 3 + \ln \dfrac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = 4 - \sqrt{3} + \ln \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 4 - \sqrt{3} + \ln(2-\sqrt{3}) \approx 1$

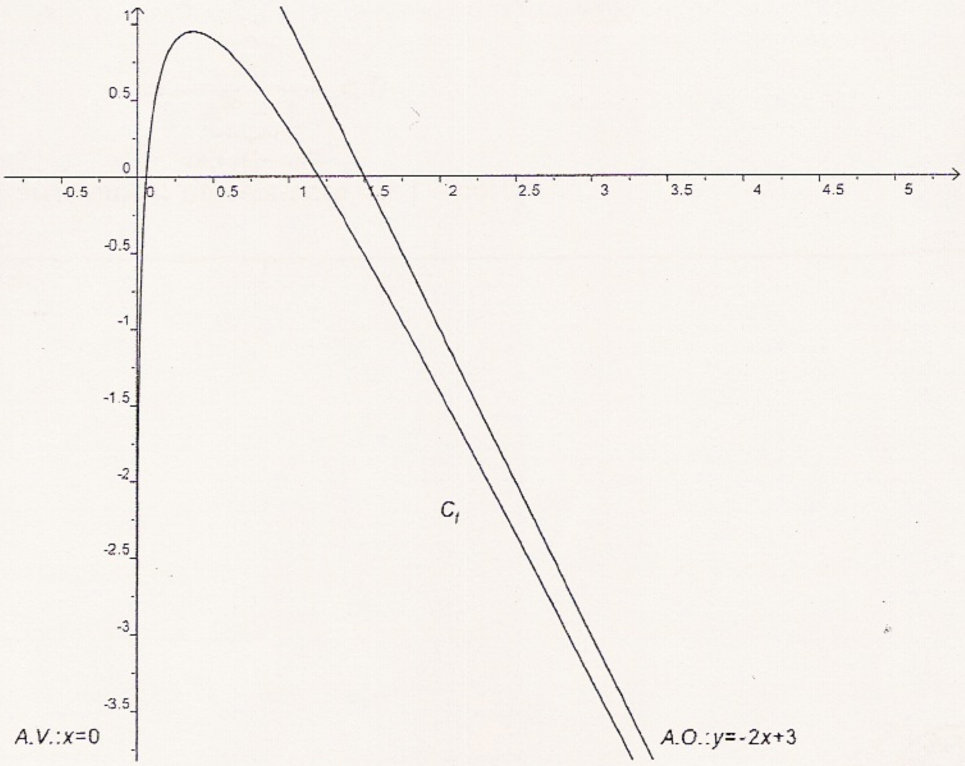
4) f est continue et strictement décroissante sur $]1;2[$

$f(]1;2[) =]\ln \frac{2}{3} - 1; 1 - \ln 2[$ et $-1 \in]\ln \frac{2}{3} - 1; 1 - \ln 2[$

Donc : $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1;2[$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1,7) \approx -0,86 \\ f(1,8) \approx -1,04 \end{array}\right\} \Rightarrow 1,7 < \alpha < 1,8$$

5)



Question VI

a) Conditions : $1+e^x \neq 0$ et $\dfrac{1-e^x}{1+e^x} > 0$

toujours vrai ! $1-e^x > 0$

$$e^x < 1$$

$$x < 0$$

$D_f =]-\infty;0[$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \ln \dfrac{\overbrace{1-e^x}^{\to 0^+}}{\underbrace{1+e^x}_{\to 2}} = -\infty$ Donc : $A.V. : x=0$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \ln \dfrac{\overbrace{1-e^x}^{\to 1}}{\underbrace{1+e^x}_{\to 1}} = 0$ Donc : $A.H. : y=0$ et pas d'A.O.

d) $\forall x \in]-\infty;0[$: $f'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1-e^x}{1+e^x}} \cdot \dfrac{-e^x(1+e^x)-(1-e^x)e^x}{(1+e^x)^2}$

$$= \frac{-e^x - e^{2x} - e^x + e^{2x}}{(1-e^x)(1+e^x)}$$

$$= \frac{-2e^x}{1-e^{2x}}$$

$$= \frac{\overbrace{2e^x}^{>0}}{\underbrace{e^{2x}-1}_{<0, \forall x\in]-\infty;0[}} < 0$$

Donc : f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$
