Septembre 2008

I 1. $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}_{+\infty-\infty\ \text{f.i.}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-2x)-(x-2)^2}{\sqrt{x^2-2x}+(x-2)}$$

.

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-2x-\cancel{x^2}+4x-4}{\sqrt{x^2-2x}+(x-2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\overbrace{2-\frac{4}{x}}^{\to2}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{\underbrace{1-\frac{2}{x}}_{\to1}}+\left(\underbrace{1-\frac{2}{x}}_{\to1}\right)\right)}=1$$

La droite d'équation $y=1$ est donc une A.H. à C_f en $+\infty$.

2. $$\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\left(\frac{\sqrt{x(x-2)}}{x-2}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to2^+}\left(\frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\sqrt{x(x-2)}}-1\right)=\lim_{x\to2^+}\left(\frac{\overbrace{x}^{\to2}}{\underbrace{\sqrt{x(x-2)}}_{\to0^+}}-1\right)=+\infty$$

f n'est pas dérivable en 2. C_f admet une tangente verticale au point d'abscisse 2.

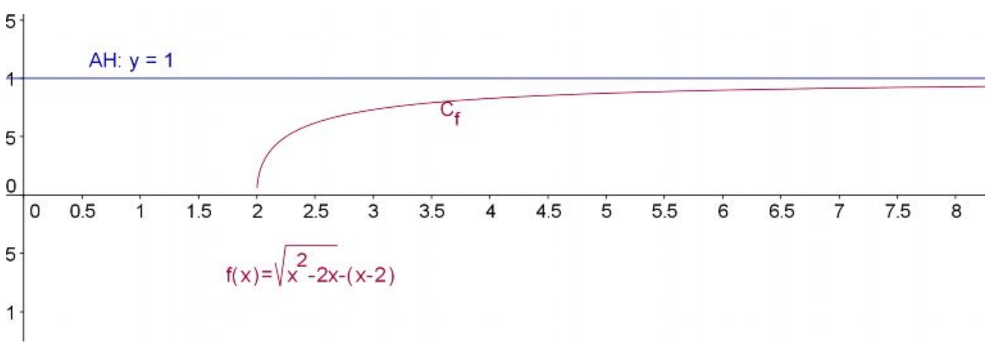
3. $$\forall x\in\left]2;+\infty\right[:\ f'(x)=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}-1=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}-1=\frac{x-1-\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$=\frac{x-1-\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-2x}}=\frac{(x-1)^2-x^2+2x}{\left[(x-1)+\sqrt{x^2-2x}\right]\sqrt{x^2-2x}}$$

$$=\frac{\cancel{x^2}\cancel{-2x}+1\cancel{-x^2}\cancel{+2x}}{\left[(x-1)+\sqrt{x^2-2x}\right]\sqrt{x^2-2x}}=\frac{1}{\left[\underbrace{(x-1)+\sqrt{x^2-2x}}_{>0\text{ sur I}}\right]\underbrace{\sqrt{x^2-2x}}_{>0}}>0$$

T.V. de f:

x	2		$+\infty$ -3
$f'(x)$	‖	+	
f	0	↗	1



III 1. $\ln\sqrt{2x-3}=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$

C.E. $(1)\ 2x-3>0 \Leftrightarrow x>\frac{3}{2}\quad (2)\ 6-x>0\Leftrightarrow x<6\quad (3)\ x>0 \Leftrightarrow E=\left]\frac{3}{2};6\right[$

$\forall x\in E:\qquad \frac{1}{2}\ln(2x-3)+\frac{1}{2}\ln x=\ln(6-x)\ \ |\cdot 2$

$\ln(2x-3)+\ln x=2\ln(6-x)$

$\ln\left[(2x-3)x\right]=\ln(6-x)^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x=36-12x+x^2$ car ln est une fct. str.$\uparrow$

$\Leftrightarrow x^2+9x-36=0\qquad \Delta=225\Rightarrow\sqrt{\Delta}015$

$\Leftrightarrow \underbrace{x_1=-12}_{\notin E}$ ou $\underbrace{x_2=3}_{\in E}$

$S=\{3\}$

2. $\frac{36}{e^x}-2e^x\geq 1\quad |\cdot e^x>0\qquad E=\mathbb{R}$

$-2e^{2x}-e^x+36\geq 0\underbrace{\Leftrightarrow}_{\cdot(-1)}2e^{2x}+e^x-36\leq 0\qquad y=e^x>0$

$2y^2+y-36\leq 0\qquad \Delta=289\Rightarrow\sqrt{\Delta}=17$

$2y^2+y-36=0\Leftrightarrow y_1=-\frac{9}{2}$ ou $y_2=4$

$2y^2+y-36\leq 0\Leftrightarrow y\in\left[-\frac{9}{2};4\right]=S_1\qquad y>0\Leftrightarrow y\in\left]0:+\infty\right[=S_2$

$S_I=S_1\cap S_2=\left]0;4\right]$

$y\in\left]0;4\right]\Leftrightarrow e^x\in\left]0;4\right]\Leftrightarrow e^x\leq 4\Leftrightarrow e^x\leq e^{\ln 4}\Leftrightarrow x\leq 4$ car la fonct. exp. est str. $\uparrow$

$S=\left]-\infty;\ln 4\right]=\left]-\infty;2\ln 2\right]$

3. a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos 3x-0}{x-\frac{\pi}{6}}$

posons $g(x)=\cos 3x$

g est définie sur $\mathbb{R}$ et $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$ g est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc

$=g'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-3\sin\frac{\pi}{2}=-3\quad \forall x\in\mathbb{R}:g'(x)=-3\sin 3x$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\underbrace{x^3}_{\to-\infty}\left(\underbrace{e^x-\frac{1}{x^2}}_{\to^{\cdot}0}\right)\right]$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3e^x-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3e^x\right)-\lim\limits_{x\to-\infty}x="0+\infty"=+\infty$

IV $f(x)=ae^{2x}+be^x\qquad D_f=\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}:f'(x)=2ae^{2x}+be^x$

$f(1)=-\frac{e^2}{2}\Leftrightarrow ae^2+be=-\frac{e^2}{2}\overbrace{\Leftrightarrow}^{\cdot e^{-1}}ae+b=-\frac{e}{2}\qquad (I)$

$$f'(1)=0 \Leftrightarrow 2ae^2+be=0 \overset{\cdot e^{-1}}{\Leftrightarrow} 2ae+b=0 \Leftrightarrow b=-2ae \qquad (II)$$

$$(II)\to(I):\ ae-2ae=-\frac{e}{2} \Leftrightarrow -ae=-\frac{e}{2} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$a=\frac{1}{2}\to(II):\ \ b=-e$$

Donc : $\forall \in \mathbb{R}: f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-e\cdot e^{x}=\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x+1}$

V. 1. Limites aux bornes de I :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\underbrace{-2x+3}_{\to 3}+\underbrace{\ln\left(\overbrace{\frac{x}{x+1}}^{\to 0^+}\right)}_{\to -\infty}\right)=-\infty \qquad \text{A.V.}: x=0$$

2. $$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(\underbrace{-2x+3}_{\to -\infty}+\underbrace{\ln\left(\overbrace{\frac{x}{x+1}}^{\to 1}\right)}_{\to 0}\right)=-\infty \ \text{ (pas d'A.H.)} \qquad \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1\right)$$

La droite $\Delta: y=-2x+3$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$, car :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-2x+3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-2x+3+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+2x-3\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=0$$

Position de C_f par rapport à Δ :

$$\forall x\in I: \varphi(x)=f(x)-(-2x+3)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)<0 \quad \left(\text{car } \frac{x}{x+1}<1\right)$$

C_f est donc en-dessous de Δ.

$$\forall x\in]0;+\infty[: f'(x)=-2+\frac{x+1}{x}\cdot\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2}=-2+\frac{\cancel{(x+1)}}{x(x+1)^{\cancel{2}}}=\frac{-2x^2-2x+1}{\underbrace{x(x+1)}_{>0 \text{ sur }]0;+\infty[}}$$

3. $-2x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow 2x^2+2x-1=0 \qquad \Delta=4+8=12 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}$

$$x_1=\frac{-\sqrt{3}-1}{2}\approx -1{,}4 \ \text{ et } \ x_2=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\approx 0{,}4$$

T.V. .

x	0		$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	$+$	0	$-$	
f	$\parallel -\infty$	$\nearrow$	$f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

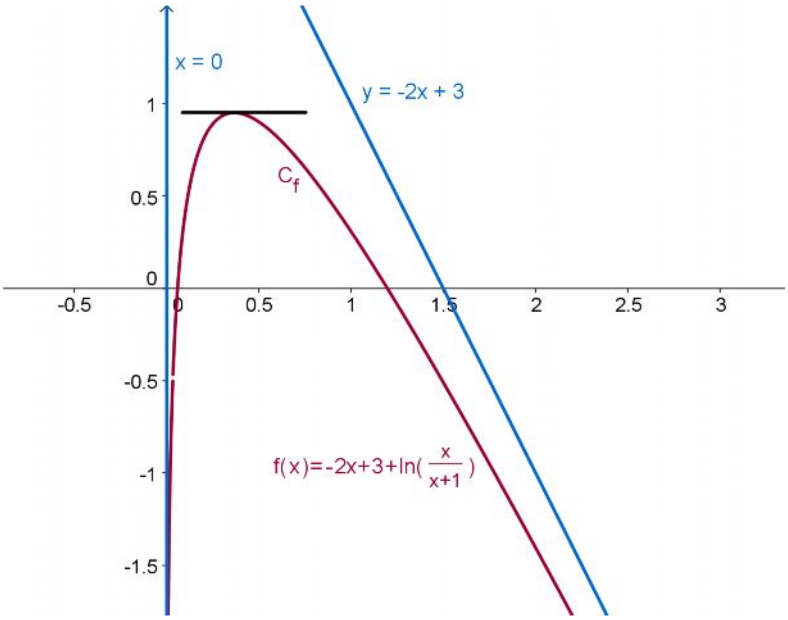
$$f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)=-\sqrt{3}+1+3+\ln\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}=4-\sqrt{3}+\ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\approx 1$$

4. f est continue et strictement décroissante sur $]1;2[$

$$f(]1;2[) =]f(2);f(1)[= \left]\underbrace{\ln\frac{2}{3}-1}_{\approx -1,4};\underbrace{1-\ln 2}_{\approx 0,3}\right[\quad \text{et} \quad -1 \in \left]\ln\frac{2}{3}-1;1-\ln 2\right[$$

Donc : $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1;2[$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,1) \approx 0,15 \\ f(1,2) \approx -0,006 \end{array}\right\} \Rightarrow 1,1 < \alpha < 1,2$$



VI. a) C.E. $\underbrace{1+e^x \neq 0}_{\text{toujours vrai}}$ et $\dfrac{1-e^x}{\underbrace{1+e^x}_{>0}} > 0$

$$\frac{1-e^x}{1+e^x} > 0 \Leftrightarrow 1-e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

$D_f =]-\infty;0[$

b) $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \ln\left(\frac{\overbrace{1-e^x}^{\to 0^+}}{\underbrace{1+e^x}_{\to 2}}\right) = -\infty \qquad \text{A.V.} : x = 0$$

c) $$\lim_{x\to -\infty^-} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \ln\left(\frac{\overbrace{1-e^x}^{\to 1^+}}{\underbrace{1+e^x}_{\to 1}}\right) = 0 \qquad \text{A.H.} : y = 0$$

d) $$\forall x \in]-\infty;0[: f'(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}\cdot\frac{-e^x(1+e^x)-(1-e^x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1+e^x}{1-e^x}\cdot\frac{-e^x \cancel{-e^{2x}} - e^x \cancel{+e^{2x}}}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{-2e^x \cancel{(1+e^x)}}{(1-e^x)(1+e^x)^{\cancel{2}}} = \frac{\overbrace{-2e^x}^{<0}}{\left(\underbrace{1-e^x}_{>0 \text{ sur }]-\infty;0[}\right)\left(\underbrace{1+e^x}_{>0}\right)} < 0$$

f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$