Juin 2009

II 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{x}_{\to+\infty} - \underbrace{\sqrt{x^2+x-6}}_{\to+\infty}\right)$ f.i.

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-x+6}{x+\sqrt{x^2+x-6}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+6}{x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\overbrace{\left(-1+\frac{6}{x}\right)}^{\to-1}}{\cancel{x}\left(1+\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}}_{\to1}\right)} = -\frac{1}{2}$$

A.H. : $y=-\frac{1}{2}$ dans un voisinage de $+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\underbrace{x}_{\to-\infty} - \underbrace{\sqrt{x^2+x-6}}_{\to+\infty}\right) = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x-6}-2x-\frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[\underbrace{-\sqrt{x^2+x-6}}_{\to-\infty} - \underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)}_{\to+\infty}\right] \text{ f.i.}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x-6}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{-\sqrt{x^2+x-6}+\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+\cancel{x}-6-\cancel{x^2}-\cancel{x}-\frac{1}{4}}{-\sqrt{x^2+x-6}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{25}{4}}{\underbrace{-\sqrt{x^2+x-6}}_{\to-\infty}+\underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)}_{\to-\infty}} = 0$$

La droite d'équation $y=2x+\frac{1}{2}$ est donc une A.O. à C_f en $-\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to-3^-}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = \lim\limits_{x\to-3^-}\frac{x-\sqrt{x^2+x-6}+3}{x+3} = \lim\limits_{x\to-3^-}\frac{(x+3)-\sqrt{x^2+x-6}}{x+3}$

$$= \lim_{x\to-3^-}\left(1-\frac{\overbrace{\sqrt{x^2+x-6}}^{\to0}}{\underbrace{x+3}_{\to0}}\right) \text{ f.i.}$$

$$= \lim_{x\to-3^-}\left(1-\frac{x^2+x-6}{(x+3)\sqrt{x^2+x-6}}\right) = \lim_{x\to-3^-}\left(1-\frac{\cancel{(x+3)}(x-2)}{\cancel{(x+3)}\sqrt{x^2+x-6}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-3^-}\left(1-\frac{\overbrace{x-2}^{\to-5}}{\underbrace{\sqrt{x^2+x-6}}_{\to0^+}}\right) = +\infty$$

f n'est pas dérivable en (-3).

C_f admet une tangente verticale au point d'abscisse (-3), c.-à-d. en $A(-3;-3)$.

III 1. $y+3y'=2 \Leftrightarrow y'=-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}$, donc $f_k(x)=ke^{-\frac{1}{3}x}-\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}}=ke^{-\frac{1}{3}x}+2 \qquad (k\in\mathbb{R})$

$\forall x\in\mathbb{R}: f_k^{'}(x)=-\frac{1}{3}ke^{-\frac{1}{3}x}$

$$f_k^{'}(-3)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow -\frac{1}{3}ke^{-\frac{1}{3}(-3)}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow ke=-1\Leftrightarrow k=-e^{-1}$$

Donc: $f(x)=-e^{-1}e^{-\frac{1}{3}x}+2=-e^{-\frac{1}{3}x-1}+2$

2. a) $2\ln x-\ln(2x+1)\geq \ln(2-x)-\frac{1}{2}\ln 9$

C.E.

$(1)\quad x>0 \qquad (2)\quad 2x+1>0 \qquad (3)\quad 2-x>0$

$x>0 \qquad x>-\frac{1}{2} \qquad x<2$

$E=]0;2[$

$\forall x\in E: \ln x^2+\ln 3\geq \ln(2-x)+\ln(2x+1)$

$\ln 3x^2\geq \ln\left[(2-x)(2x+1)\right]\Leftrightarrow 3x^2\geq (2-x)(2x+1)$ car la fct. ln est str. $\uparrow$

$\Leftrightarrow 5x^2-3x-2\geq 0 \qquad \Delta=9+40=49\Rightarrow \sqrt{\Delta}=7$

$$5x^2-3x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pm 7}{10}\left\langle \begin{array}{l} x_1=-\frac{2}{5} \\ x_2=1 \end{array}\right.$$

T.S. de $x(x^2-1)$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		1		$+\infty$
$5x^2-3x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_1=\left]-\infty;-\frac{2}{5}\right]\cup[1;+\infty[\qquad S=S_1\cap E=[1;2[$

2. b) $\ln\frac{1+e^x}{1-e^x}\leq 1$

C.E.

$$\left.\begin{array}{l} 1-e^x\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0 \\ \dfrac{\overbrace{1+e^x}^{>0}}{1-e^x}>0\Leftrightarrow 1-e^x>0\Leftrightarrow e^x<1\Leftrightarrow x<0 \end{array}\right\}\Rightarrow E=]-\infty;0[$$

$\forall x\in E: \quad \ln\frac{1+e^x}{1-e^x}\leq 1\Leftrightarrow \ln\frac{1+e^x}{1-e^x}\leq \ln e\Leftrightarrow \frac{1+e^x}{1-e^x}\leq e$ car la fct. ln est str. $\uparrow$

$\Leftrightarrow 1+e^x\leq (1-e^x)e\Leftrightarrow e^x+1\leq e-e\cdot e^x$

$\Leftrightarrow e^x+e\cdot e^x\leq e-1\Leftrightarrow e^x(1+e)\leq e-1\Leftrightarrow e^x\leq \frac{e-1}{\underbrace{e+1}_{>0}} \qquad (e+1>0)$

$x\leq \underbrace{\ln\frac{e-1}{e+1}}_{<0} \qquad S=\left]-\infty;\ln\frac{e-1}{e+1}\right]$

IV

a) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}\Big(\underbrace{\ln x}_{\to+\infty} \underbrace{-x^3}_{\to-\infty}\Big) \quad \text{f.i.}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{\to 0} \underbrace{-x}_{\to-\infty}\right) = -\infty$$

b) $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{x}^{\to 0}}{\underbrace{1-e^{-x}}_{\to 0}} \quad \text{f.i.}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{e^x-1}{e^x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{e^x}^{\to 1}}{\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\to 1}} = 1$$

c) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\overbrace{\sin x - 1}^{\to 0}}{\underbrace{x-\frac{\pi}{2}}_{\to 0}} \quad \text{f.i.}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = g'\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \left(\text{la fonct. sin est dérivable en } \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

V. 1.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(\underbrace{6-x}_{\to 4} - 2\underbrace{\ln\left(\frac{\overbrace{x}^{\to 2^+}}{\underbrace{x-2}_{\to 0^+}}\right)}_{\to+\infty}\right) = -\infty \qquad \text{A.V.: } x = 2$$

2. $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{6-x}_{\to-\infty} - 2\underbrace{\ln\overbrace{\left(\frac{x}{x-2}\right)}^{\to 1}}_{\to 0}\right) = -\infty \quad \text{(pas d'A.H.)} \quad \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1\right)$$

La droite $\Delta : y = x + 5$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$, car :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+6)\right] = -2\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\ln\left(\frac{x}{x+3}\right)}_{\to 0} = 0$$

Position de C_f par rapport à Δ :

$$\forall x \in \left]2;+\infty\right[: \varphi(x) = f(x)-(-x+6) = -2\underbrace{\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)}_{>0} < 0 \quad \left(\text{car } \frac{x}{x-2} > 1\right)$$

C_f est donc en-dessous de l’asymptote oblique.

3. Calcul de $f'(x)$:

$$\forall x \in]2;+\infty[: f'(x) = -1 - 2\frac{\cancel{(x-2)}(x-2-x)}{x(x-2)^{\cancel{2}}} = -1 + \frac{4}{x(x-2)} = \frac{-x^2+2x+4}{\underbrace{x(x-2)}_{>0}}$$

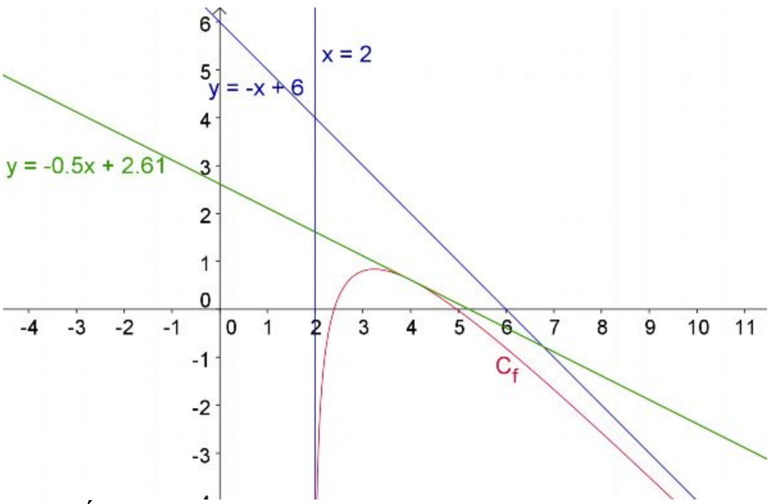
$f'(x)$ a le signe de $-x^2+2x+4$ $\qquad \Delta = 4+16 = 20 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$

$$-x^2+2x+4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{-2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 1-\sqrt{5} \\ x_2 = 1+\sqrt{5} \end{array} \right.$$

T.V. .

x	2		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	$f(1+\sqrt{5})$	$\searrow$	$-\infty$

4. Représentation graphique



5. Équation de la tangente au point d'abscisse 4 :

$$y - f(4) = f'(4)(x-4) \Leftrightarrow y - (2 - 2\ln 2) = -\frac{1}{2}(x-4) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4 - 2\ln 2$$

VI Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ex + e^{-x}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{ex}_{\to-\infty} + \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}\right) \qquad \text{f.i.}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}\left(e\underbrace{xe^{x}}_{\to 0}+1\right)\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{ex}_{\to+\infty} + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}\right) = +\infty$$

$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = e - e^{-x}$

$$f'(x) \left\langle \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\rangle 0 \Leftrightarrow e \left\langle \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\rangle e^{-x} \Leftrightarrow e \cdot e^{x} \left\langle \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\rangle e^{-x} \cdot e^{x} \Leftrightarrow e^{x+1} \left\langle \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\rangle e^{0} \Leftrightarrow x+1 \left\langle \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\rangle 0 \Leftrightarrow x \left\langle \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\rangle -1$$

T.V. .

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)=-e+\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1)=-e+\frac{1}{e}\approx -2,4<0$ f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$

$f(]-\infty;-1[)=\left]-e+\frac{1}{e};+\infty\right[$ et $5\in\left]-e+\frac{1}{e};+\infty\right[$

Donc $f(x)=5$ admet une solution unique α dans $]-\infty;-1[$

f est continue et strictement croissante sur $]-1;+\infty[$

$f(]-1;+\infty[)=\left]-e+\frac{1}{e};+\infty\right[$ et $5\in\left]-e+\frac{1}{e};+\infty\right[$

Donc $f(x)=5$ admet une solution unique β dans $]-1;+\infty[$.

$f(x)=5$ admet donc exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

$f(-2,5)\approx 5,4$ et $f(-2,4)\approx 4,5 \Rightarrow -2,5<\alpha<-2,4$

$f(1,7)\approx 4,8$ et $f1,8\approx 5,1 \Rightarrow 1,7<\beta<1,8$