Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle

EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES

Régime technique – Division technique générale

1re Session 2009 Repêchage

BRANCHE : ***Mathématiques I***

DATE : 15 Juin 2009 *DUREE :* *2h15*

Question I (6 + 2 = 8 points)

Démontrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

Question II (3 + 4 + 3 = 10 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;-3] \cup [2;+\infty[$ par $f(x) = x - \sqrt{x^2+x-6}$.

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) Démontrer que la droite d d'équation $y = 2x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

3) Étudier la dérivabilité de la fonction f en -3. Que peut-on en déduire graphiquement ?

Question III (3 + (5 + 4) = 12 points)

1) f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Déterminer la fonction f telle que :

- pour tout x réel, $f(x) + 3f'(x) = 2$;
- $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse -3 une tangente de coefficient directeur $\dfrac{1}{3}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $2\ln x - \ln(2x+1) \geqslant \ln(2-x) - \dfrac{1}{2}\ln 9$

b) $\ln \dfrac{1+e^x}{1-e^x} \leqslant 1$

Question IV (2 + 2 + 2 = 6 points)

Déterminer la limite de la fonction à l'endroit indiqué :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(\ln x - x^3\right)$ en $+\infty$,

b) $f(x) = \dfrac{x}{1-e^{-x}}$ en 0,

c) $f(x) = \dfrac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$ en $\dfrac{\pi}{2}$

La Commissaire du Gouvernement

Question V ($2 + 3 + 5 + 3 + 2 = 15$ points)

Soit f la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = 6 - x - 2\ln\dfrac{x}{x-2}$.

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition.
2) Montrer que la droite Δ d'équation $y = -x + 6$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$, puis étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.
5) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

Question VI (9 points)

Quelle est le nombre de solution de l'équation $ex + e^{-x} = 5$? Donner un encadrement de chaque solution à 10^{-1} près.

La Commissaire du Gouvernement