I 1) Posons $\ln x = X$, alors $x = e^X$ et $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{X}{e^X}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$

Par conséquent :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^X}$ (théorème de la limite des fonctions composées)

$\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{g(x)} = 0$

2) Posons $\ln x = X$, alors $x = e^X$ et $x\ln x = \left(e^X\right)\cdot X = Xe^X$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} X = -\infty$

Par conséquent :

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0} Xe^X = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X$ (th. de la limite des fonctions composées)

Or $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$.

II

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \ln\sqrt{\frac{1-\sin \mathrm{x}}{1+\sin \mathrm{x}}} \qquad \mathrm{I} = \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sin \mathrm{x}}{1+\sin \mathrm{x}}\right)$$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{1+\sin \mathrm{x}}}{1-\sin \mathrm{x}}\cdot\frac{-\cos \mathrm{x}(1+\sin \mathrm{x})-\cos \mathrm{x}(1-\sin \mathrm{x})}{(1+\sin \mathrm{x})^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos \mathrm{x}\cancel{-\cos \mathrm{x}\sin \mathrm{x}}-\cos \mathrm{x}\cancel{+\cos \mathrm{x}\sin \mathrm{x}}}{(1-\sin \mathrm{x})(1+\sin \mathrm{x})}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{-2\cos \mathrm{x}}{1-\sin^2 \mathrm{x}} = -\frac{\cancel{\cos \mathrm{x}}}{\cos^{\cancel{2}} \mathrm{x}} = -\frac{1}{\cos \mathrm{x}}$$

$$\text{ou : } \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sin \mathrm{x}}{1+\sin \mathrm{x}}\right) = \frac{1}{2}\left[\ln(1-\sin \mathrm{x}) - \ln(1+\sin \mathrm{x})\right]$$

car $1-\sin \mathrm{x} > 0$ et $1+\sin \mathrm{x} > 0$ sur I

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(-\cos \mathrm{x})}{1-\sin \mathrm{x}} - \frac{\cos \mathrm{x}}{1+\sin \mathrm{x}}\right] = \frac{\cos \mathrm{x}}{2}\cdot\frac{-1\cancel{-\sin \mathrm{x}}-1\cancel{+\sin \mathrm{x}}}{(1-\sin^2 \mathrm{x})}$$

$$= -\frac{2\cos \mathrm{x}}{2\cos^2 \mathrm{x}} = -\frac{1}{\cos \mathrm{x}}$$

III 1) a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-9}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x+\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-9}="+\infty+\infty"=+\infty$.

b. La droite d'équation $y=\frac{3}{2}x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ ssi

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{3}{2}x\right)=0.$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{3}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-9}-\frac{3}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)}{\sqrt{x^2-9}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-9}{\sqrt{x^2-9}+x}=0$$

2) a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-9}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x+\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-9}="-\infty+\infty"$ f.i.

b. $\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-9}=\frac{1}{2}x+|x|\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}=\frac{1}{2}x-x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}=x\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}\right)$ si $x<0$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-9}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}\right)\right]="-\infty\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)"=+\infty\quad\left(\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}=1\right)$$

c. La droite d'équation $y=-\frac{1}{2}x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $-\infty$ ssi

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+\frac{1}{2}x\right)=0.$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-9}+\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)}{\sqrt{x^2-9}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-9}{\sqrt{x^2-9}-x}="-\frac{9}{+\infty+\infty}=-\frac{9}{+\infty}"=0$$

3) f est dérivable en $x=3$ ssi $\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=a$ avec $a\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3^+}\frac{\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-9}-\frac{3}{2}}{x-3}=\lim_{x\to3^+}\frac{\frac{1}{2}(x-3)+\sqrt{(x-3)(x+3)}}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3^+}\frac{\frac{1}{2}(x-3)+(x-3)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}}{x-3}\quad\text{car } x-3>0 \text{ si } x>3$$

$$=\lim_{x\to3^+}\left[\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{x-3}}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}\right)\right]=\lim_{x\to3^+}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{\overbrace{x+3}^{\to6}}{\underbrace{x-3}_{\to0^+}}}\right)="\frac{1}{2}+\infty"=+\infty$$

Comme $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=+\infty$, f n'est pas dérivable en 3 ; $\mathscr{C}$ admet une tangente verticale en $A\left(3;\frac{3}{2}\right)$

IV Sur I, $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{\ln(x-1)}{x}$

1) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{2}x+\frac{\ln(x-1)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{2}x+\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\overbrace{\ln(x-1)}^{\to-\infty}}{\underbrace{x}_{\to 1^+}}="\frac{1}{2}-\infty"=-\infty$ A.V.: $x=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x+\frac{\ln(x-1)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x+\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x}}_{\to 0}="+\infty+0"=+\infty$

car si $x>1$, alors $0\leq\frac{\ln(x-1)}{x}<\frac{\ln x}{x}$ (la fonction ln est strict. croissante)

Donc $0\leq\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x}<\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x}=0$ (théor. d'encadrement)

2) $\mathscr{C}$ admet une A.O. d'équation $y=\frac{1}{2}x$ en $+\infty$ ssi $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x}=0$

Conclusion : $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x=1$ et une asymptote oblique d'équation $y=\frac{1}{2}x$

3) $\delta=f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{\ln(x-1)}{x}$ a le signe de $\ln(x-1)$

$\ln(x-1)\left\langle\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\rangle 0\Leftrightarrow x-1\left\langle\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\rangle 1\Leftrightarrow x\left\langle\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\rangle 2$

$\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ ssi $x\in]2;+\infty[$; $\mathscr{C}$ coupe Δ ssi $x=2$

$\mathscr{C}$ est en-dessous de Δ ssi $x\in]1;2[$

V 1) $f(x)=e^{\sqrt{x}}-2x$

Pour déterminer que $\mathscr{C}$ présente un maximum en A et un minimum en B il faut étudier $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Sur $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}-2=\frac{e^{\sqrt{x}}-4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

Posons $\varphi(x)=e^{\sqrt{x}}-4\sqrt{x}$

$f'(x)$ a le même signe que $\varphi(x)$, car $2\sqrt{x}>0$.

Étude de $\varphi(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\underbrace{e^{\sqrt{x}}}_{\to 1}-\underbrace{4\sqrt{x}}_{\to 0}\right)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\underbrace{e^{\sqrt{x}}}_{\to+\infty}\underbrace{\left(1-4\underbrace{\frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}}}_{\to 0}\right)}_{\to 1}\right]=+\infty$ (changement de variable $X=\sqrt{x}$)

$$\varphi'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}-\frac{4}{2\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}-4}{2\sqrt{x}}$$

$$\varphi'(x)\left\langle\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\rangle 0\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}}-4\left\langle\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\rangle 0\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}}\left\langle\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\rangle 4\Leftrightarrow \sqrt{x}\left\langle\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\rangle \ln 4\Leftrightarrow x\left\langle\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\rangle (\ln 4)^2\approx 1,92$$

$$\varphi\left((\ln 4)^2\right)=e^{\ln 4}-4\ln 4=4(1-\ln 4)\simeq -1,55$$

Tableau :

x	0		$(\ln 4)^2$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	1	$\searrow$	min $-1,55$	$\nearrow$	$+\infty$

Comme $\varphi(x)$ est une fonction continue sur $]0;+\infty[$, strictement monotone sur $J=\left]0;(\ln 4)^2\right[$ et sur $K=\left](\ln 4)^2;+\infty\right[$ et change de signe sur J et K, l'équation $\varphi(x)=0$ admet exactement une solution $\alpha\in J$ et exactement une solution $\beta\in K$

Tableau :

x	0		α		β		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	1	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

2) $\left.\begin{matrix}\varphi(0,1)\simeq 0,1\\ \varphi(0,2)\simeq -0,22\end{matrix}\right\rangle\Rightarrow\alpha\in]0,1;0,2[$ $\quad$ $\left.\begin{matrix}\varphi(0,12)\simeq 0,028\\ \varphi(0,13)\simeq -0,08\end{matrix}\right\rangle\Rightarrow\alpha\in]0,12;0,13[\Rightarrow\alpha=0,12...$

$\left.\begin{matrix}\varphi(4)\simeq -0,6\\ \varphi(5)\simeq 0,4\end{matrix}\right\rangle\Rightarrow\beta\in]4;5[$ $\quad$ $\left.\begin{matrix}\varphi(4,6)\simeq -0,04\\ \varphi(4,7)\simeq 0,07\end{matrix}\right\rangle\Rightarrow\beta\in]4,6;4,7[$

$\left.\begin{matrix}\varphi(4,63)\simeq -0,007\\ \varphi(4,64)\simeq 0,004\end{matrix}\right\rangle\Rightarrow\beta\in]4,63;4,64[\Rightarrow\beta=4,63...$

VI $\quad f(x)=(1-x)^2e^{1-x}$

a) $\mathrm{Dom}\, f=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)="+\infty\cdot(+\infty)"=+\infty$ (pas d'A. H.)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: Posons $1-x=X$

$$\lim_{x\to+\infty} X=\lim_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{X\to-\infty}X^2e^X=0$$

$\mathscr{C}$ admet l'asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $+\infty$.

b) $f'(x) = -2(1-x)e^{1-x} - (1-x)^2 e^{1-x} = (-x^2+4x-3)e^{1-x}$.

Comme $e^{1-x} > 0$, l'étude du signe de f'(x) revient à faire l'étude du signe de $-x^2+4x-3$.

$$-x^2+4x-3=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=3$$

$$-x^2+4x-3<0 \text{ ssi } x \in]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$$

$$-x^2+4x-3>0 \text{ ssi } x \in]1;3[$$

f est strict. $\downarrow$ sur $]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$ et strict.$\uparrow$ sur $]1;3[$ f admet un minimum pour $x=1$ et un maximum pour $x=3$.

$f(1) = 0 \cdot e^0 = 0$; $f(3) = 4 \cdot e^{-2} = \dfrac{4}{e^2} \approx 0,54$

Tableau :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'(x)		—	0	+	0	—	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	min 0	$\nearrow$	max $\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

3) Équation de la tangente au point d'abscisse 0 : $y = xf'(0) + f(0)$

$f(0) = e$; $f'(0) = -3e \Rightarrow y = -3ex + e$

VII. 1) $3e^{2x} - 20 = 7e^x \quad \Leftrightarrow 3e^{2x} - 7e^x - 20 = 0$

Posons $e^x = y \Rightarrow y > 0$

$3e^{2x} - 7e^x - 20 = 0 \quad \Leftrightarrow 3y^2 - 7y - 20 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 49 + 240 = 289 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 17$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 \pm 17}{6} \left\langle \begin{array}{l} y_1 = -\dfrac{5}{3} \text{ à écarter} \\ y_2 = 4 \end{array} \right.$$

$y = 4 \Leftrightarrow e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4 \quad (S = \{\ln 4\})$

2) $y' - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y' = 3y - 2$

$$y = ke^{3x} + \frac{2}{3} = f(x)$$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow ke^0 + \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow k = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}$$