Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 1

Question 1 (5 + 3 = 8 points)

Voir cours

18 mai 2010

Question 2 (3 + 3 + 3 = 9 points)

$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 3x - 10} \qquad D_f = \left]-\infty\,;-5\right] \cup \left[2\,;+\infty\right[$

a)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\underbrace{x}_{\to -\infty} + \underbrace{\sqrt{x^2+3x-10}}_{\to +\infty} \right) \quad \text{f.i.}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - \left(x^2 + 3x - 10\right)}{x - \sqrt{x^2+3x-10}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x + 10}{x - |x|\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(-3 + \frac{10}{x}\right)}{x + x\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}^{1}\overbrace{\left(-3 + \frac{10}{x}\right)}^{\to -3}}{\cancel{x}_{1}\underbrace{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}}\right)}_{\to 2}}$$

$$= \frac{-3}{2}$$

Donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{3}{2}$ en $-\infty$.

b)

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(2x + \frac{3}{2}\right) \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x-10} - x - \frac{3}{2} \right) \quad \text{f.i.}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2+3x-10} - \left(x + \frac{3}{2}\right) \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x - 10 - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+3x-10} + x + \frac{3}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x - 10 - x^2 - 3x - \frac{9}{4}}{\sqrt{x^2+3x-10} + x + \frac{3}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{49}{4}}{\underbrace{\sqrt{x^2+3x-10}}_{\to +\infty} + \underbrace{x + \frac{3}{2}}_{\to +\infty}}$$

$$= 0$$

Donc la droite Δ d'équation $y = 2x + \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ *en* $+\infty$.

c)

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{x + \sqrt{x^2+3x-10} - 2}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{x - 2 + \sqrt{x^2+3x-10}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \left(1 + \frac{\sqrt{(x-2)(x+5)}}{x - 2} \right)$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \left(1 + \frac{\sqrt{(x-2)(x+5)}}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{(x-2)(x+5)}}{\sqrt{(x-2)(x+5)}} \right)$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \left(1 + \frac{\cancel{(x-2)}^{1}\overbrace{(x+5)}^{\to 7}}{\cancel{(x-2)}_{1} \cdot \underbrace{\sqrt{(x-2)(x+5)}}_{\to 0^+}} \right)$$

$$= +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 2.
$\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 2.

Question 3 (3 + 3 + 1 + 4 = 11 points)

$f(x) = \dfrac{3 - e^x}{e^x + 1}$ $\qquad\qquad D_f = \mathbb{R}$

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3 - \overbrace{e^x}^{\to 0}}{\underbrace{e^x}_{\to 0} + 1} = 3$

$\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 3$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 - \overbrace{e^x}^{\to +\infty}}{\underbrace{e^x}_{\to \infty} + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{e^x}^{\,1}\left(3e^{-x} - 1\right)}{\cancel{e^x}_{\,1}\left(1 + e^{-x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\overbrace{3e^{-x}}^{\to 0} - 1}{1 + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}} = -1$

$\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $+\infty$.

2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \dfrac{-e^x\left(e^x + 1\right) - \left(3 - e^x\right)e^x}{\left(e^x + 1\right)^2}$

$= \dfrac{-e^{2x} - e^x - 3e^x + e^{2x}}{\left(e^x + 1\right)^2}$

$= \dfrac{-4e^x}{\left(e^x + 1\right)^2} < 0$

Tableau de variations :

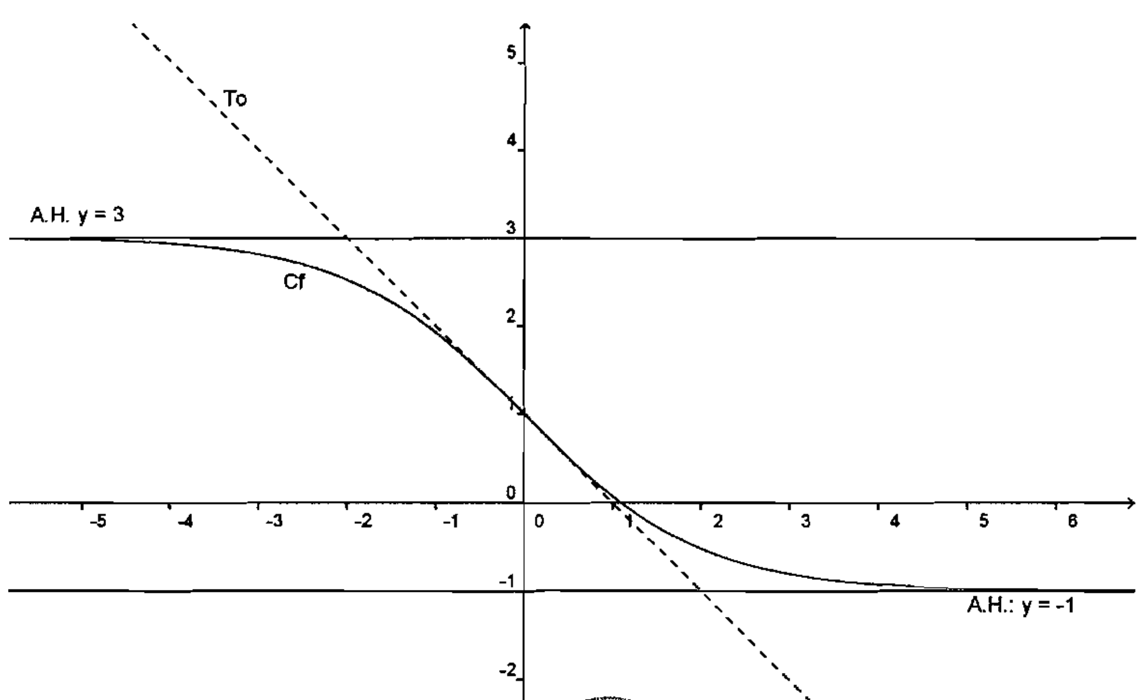
x	$-\infty$		$+\infty$
f '(x)		$-$	
f (x)	3	$\searrow$	-1

3) $f'(0) = \dfrac{-4 \cdot 1}{(1+1)^2} = -1 \qquad f(0) = \dfrac{3 - 1}{1 + 1} = 1$

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est T_0 : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

soit $\quad y = -x + 1$

4)



Question 4 (2 + 4 + 3 = 9 points)

1) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\overbrace{3x}^{\to-\infty}-e+\overbrace{e^{-x}}^{\to+\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[\underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}\underbrace{\left(3\underbrace{x\cdot e^{x}}_{\to0}-e\cdot\underbrace{e^{x}}_{\to0}+1\right)}_{\to1}\right]=+\infty$$

2) $e^{x}>2+15e^{-x}$

$e^{x}-2-15e^{-x}>0 \quad \left|\cdot e^{x}>0\right.$

$e^{2x}-2e^{x}-15>0$

Posons $y=e^{x}>0$.

Alors l'équation devient :

$y^{2}-2y-15>0 \qquad \Delta=64 \qquad y_1=5 \qquad y_2=-3$

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$y^{2}-2y-15$		+	0	−	0	+	

$y<-3$ ou $y>5$

$\underbrace{e^{x}<-3}_{impossible}$ ou $e^{x}>5$

$x>\ln 5 \qquad\qquad S=\left]\ln 5\,;+\infty\right[$

3) $f(x)+4f'(x)=0$

$f'(x)=-\dfrac{1}{4}f(x)$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de cette éq. différentielle sont les fonctions $f_k(x)=k\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ $(k\in\mathbb{R})$

Le point $A(8\,;2)$ est un point de $\mathcal{C}_f$, donc $f(8)=2$.

Déterminons k : $f_k(8)=k\cdot e^{-\frac{1}{4}8}$

$2=k\cdot e^{-2}$

$k=2e^{2}$

La fonction cherchée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2e^{2}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}=2e^{2-\frac{x}{4}}$

Question 5 ((1 + 2 + 2 + 1)+ (2 + 4 + 3) = 15 points)

1) $g(x) = x^2 - 3 + 3\ln x \qquad D_g =]0\,;+\infty[$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\underbrace{x^2}_{\to 0} - 3 + \underbrace{3\ln x}_{\to -\infty}\right) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\underbrace{x^2}_{\to +\infty} - 3 + \underbrace{3\ln x}_{\to +\infty}\right) = +\infty$

b) $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ g'(x) = 2x + \dfrac{3}{x}$

$= \dfrac{2x^2+3}{x} > 0$

x	0		$+\infty$
g '(x)	‖	+	
g (x)	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

c) La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$,

$g\left(]0\,;+\infty[\right) =]-\infty\,;+\infty[$ et $0 \in]-\infty\,;+\infty[$,

donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution réelle unique $\alpha \in]0\,;+\infty[$.

Or $g(1{,}4) \cong -0{,}03 < 0$ et $g(1{,}5) \cong 0{,}47 > 0$, donc $\boxed{1{,}4 < \alpha < 1{,}5}$

d)

x	0		α		$+\infty$
g(x)	‖	−	0	+	

2) $f(x) = x + 2 - 3\dfrac{\ln x}{x} \qquad D_f =]0\,;+\infty[$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\underbrace{x+2}_{\to 2} - 3\dfrac{\overbrace{\ln x}^{\to -\infty}}{\underbrace{x}_{\to 0^+}}\right) = +\infty$ A.V. : x = 0

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\underbrace{x+2}_{\to +\infty} - 3\underbrace{\dfrac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right) = +\infty$ pas d' A.H. en $+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x) - (x+2)\right] = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-3\underbrace{\dfrac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right) = 0$

Donc d : $y = x + 2$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

$\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad \varphi(x) = f(x) - (x+2) = -3\dfrac{\ln x}{x}$

$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow -3\dfrac{\ln x}{\underbrace{x}_{>0}} > 0 \Leftrightarrow -3\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$

x	0		1		$+\infty$
$\varphi(x)$	‖	+	0	−	
Position	‖	$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de d	$\mathcal{C}_f$ coupe d	$\mathcal{C}_f$ est en-dessous de d	

c) $\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[,\ f'(x) = 1-3\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'$

$$= 1-3\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{x^2-3(1-\ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{x^2-3+3\ln x}{x^2}$$

$$= \frac{g(x)}{\underbrace{x^2}_{>0}}$$ Donc le signe de f'(x) est le signe de g(x) sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

Tableau de variation de f :

x	0		α		$+\infty$
f '(x)	‖	$-$		$+$	
f (x)	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$f(\alpha) \cong f(1{,}4) \cong 2{,}7$

Question 6 (8 points)

$f(x) = 2e^x + (x+2)e^{-x} \qquad D_f = [0\,;+\infty[$

$$\begin{aligned}\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad f'(x) &= 2e^x + 1\cdot e^{-x} + (2+x)e^{-x}\cdot(-1)\\ &= 2e^x + 1\cdot e^{-x} + (-2-x)e^{-x}\\ &= 2e^x + (-1-x)e^{-x}\end{aligned}$$

Pour démontrer qu'il existe une seule tangente à $\mathcal{C}_f$ de coefficient directeur 2, il faut démontrer que l'équation $f'(x) = 2$ admet une solution réelle unique.

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par $g(x) = 2e^x + (-1-x)e^{-x}$

On doit alors démontrer que l'équation $g(x) = 2$ admet une solution réelle unique.

Etudions les variations de la fonction g :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad g'(x) &= 2e^x + (-1)\cdot e^{-x} + (-1-x)e^{-x}\cdot(-1)\\ &= 2e^x + (-1)\cdot e^{-x} + (+1+x)e^{-x}\\ &= \underbrace{2e^x}_{>0} + \underbrace{x}_{>0}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{>0} > 0\end{aligned}$$

x	0		$+\infty$
g '(x)		+	
g (x)	1	$\nearrow$	$+\infty$

$g(0) = 2 - 1\cdot 1 = 1$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left[2e^x + (-1-x)e^{-x}\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{2e^x}_{\to+\infty} - \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}\underbrace{-xe^{-x}}_{\to 0}\right]\\ &= +\infty\end{aligned}$$

La fonction g est continue et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

$g([0\,;+\infty[) = [1\,;+\infty[$ et $2 \in [1\,;+\infty[$,

donc l'équation $g(x) = 2$ admet une solution réelle unique $\alpha \in [0\,;+\infty[$.

[Or $g(0{,}38) \cong 1{,}98 < 2$ et $g(0{,}39) \cong 2{,}01 > 2$, donc $0{,}38 < \alpha < 0{,}39$]

Il existe donc une seule tangente à $\mathcal{C}_f$ de coefficient directeur 2 ; c'est la tangente au point d'abscisse α.