Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle

EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES

Régime technique – Division technique générale

1re Session 2010

BRANCHE : Mathématiques I

DATE : 3 juin 2010 REPÊCHAGE DUREE : 2 heures 15 minutes

I Démontrez: 1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

(2+3 = 5 points)

II 1) Démontrez que les solutions dans R de l'équation différentielle $y' = a\,y$ $(a \neq 0)$ sont les fonctions f_k définies par $f_k(x) = k\,e^{ax}$ où k est un réel quelconque.

2) f est une fonction dérivable sur R, C_f sa courbe représentative.
Déterminez la fonction f telle que :
pour tout réel x, $3f(x)+4f'(x) = 0$
et C_f admet au point d'abscisse 4 une tangente de coefficient directeur -1.

(5+3 = 8 points)

III f est la fonction définie par $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 6x + 6}$.
C_f est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) Indiquez le domaine de définition de f.
2) Calculez la limite de f en $+\infty$.
3) Prouvez que la droite d d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$.
4) Calculez la limite de f en $-\infty$ et interprétez graphiquement le résultat.
5) Étudiez la dérivabilité de la fonction f en $(3-\sqrt{3})$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

(2+1 +2+3+4 = 12 points)

IV f est la fonction définie sur R par $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 15$.

1) Est-il vrai que l'équation $f(x) = 10$ a trois solutions distinctes et trois seulement dans R ?
2) Des résultats trouvés sous 1) déduisez une valeur réelle pour m telle que l'équation $f(x) = m$ n'admette pas de solution dans R.

(7+1 = 8 points)

La Commissaire du Gouvernement

V

1) Résolvez l'équation: $e^{\ln\left(x^2-1\right)} = x \cdot \ln e^{1-x}$

2) Résolvez l'inéquation: $2\ln(3-x) \leq \ln(x+1) + \ln(x-2)$

3) f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = ax^2 + 5 + b\ln x$, avec a et b réels.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.
Déterminez les réels a et b tels que la tangente à C_f au point $A(1;6)$ est horizontale.

(4+4+4 = 12 points)

VI

f est la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x) = x + 1 - \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.
C_f est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1) Étudiez les limites de f aux bornes du domaine de définition.
Interprétez graphiquement ces résultats.
2) Trouvez l'équation de l'asymptote oblique à C_f en $-\infty$.
3) Étudiez la position relative de C_f et de d pour $x \in]-\infty;0[$.
4) Prouvez que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$.
5) Dressez le tableau de variations de f.
6) Construisez dans un repère orthonormal (unité : 1 cm) les asymptotes puis la courbe C_f.

(4+2+2+1+3+3 = 15 points)