MATHEMATIQUES I - CORRIGE

1re session 2011

Exercice 1 *(4+2+2+3=11 points)*

1) a) voir théorème 3 p.88 b) voir théorème 4 p.88

2) a) et b) voir théorème 5 p.120

Exercice 2 *(1+4+3+2=10 points)*

1) Condition d'existence : $x^2+3x-4\geq 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-1)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty;-4]\cup[1;+\infty[$

Tableau des signes :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(2x+\frac{3}{2}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-\frac{3}{2}-\sqrt{x^2+3x-4}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+\frac{9}{4}+3x-(x^2+3x-4)}{-x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x-4}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{25}{4}}{\underbrace{x}_{\to-\infty}\underbrace{\left(-1-\underbrace{\frac{3}{2x}}_{\to 0}-\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}\right)}_{\to-2}}\right)=0$$

Donc la droite *(d)* d'équation $y=2x+\frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à C_f en $-\infty$.

3) $$\lim_{x\to1^+}\left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right]=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x-1-\sqrt{x^2+3x-4}}{x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to1^+}\left(1-\frac{\sqrt{(x-1)(x+4)}}{x-1}\right)=\lim_{x\to1^+}\left(1-\underbrace{\frac{\overbrace{\sqrt{x+4}}^{\to\sqrt{5}}}{\underbrace{\sqrt{x-1}}_{\to0^+}}}_{\to+\infty}\right)=-\infty$$

f n'est donc pas dérivable en 1 et C_f admet une tangente verticale en 1.

4) $\forall x\in\,]-\infty;-4[\cup]1;+\infty[$: $f'(x)=1-\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-4}}\left(=\dfrac{2\sqrt{x^2+3x-4}-2x-3}{2\sqrt{x^2+3x-4}}\right)$

Exercice 3 *(3+3+3+9=18 points)*

1) $e^{x^2}\cdot\left(e^{-2}\right)^3 \leq \frac{1}{e}\cdot e^{4x} \Leftrightarrow e^{x^2-6} \leq e^{4x-1} \Leftrightarrow x^2-6 \leq 4x-1 \Leftrightarrow x^2-4x-5 \leq 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1) \leq 0$

Tableau des signes :

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
x^2-4x-5		+	0	-	0	+	

$S=[-1;5]$

2) Conditions d'existence : $x>0$ et $x>-2$ et $x>-1 \Leftrightarrow x>0$

$\ln x+\ln 2=\ln(3x+6)-\ln(x+1) \Leftrightarrow \ln 2x=\ln\frac{3x+6}{x+1} \Leftrightarrow 2x=\frac{3x+6}{x+1}$

$\Leftrightarrow 2x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $\underbrace{x=-\frac{3}{2}}_{\text{à écarter}}$ $\qquad S=\{2\}$

3) $5y+2y'-3=0 \Leftrightarrow y'=-\frac{5}{2}y+\frac{3}{2}$

Solutions : $f_\lambda(x)=\lambda e^{-\frac{5}{2}x}-\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{5}{2}}=\lambda e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{3}{5}$; $\lambda\in\mathbb{R}$

$f_\lambda(0)=3 \Leftrightarrow \lambda e^0+\frac{3}{5}=3 \Leftrightarrow \lambda=\frac{12}{5}$ $\qquad \Rightarrow f(x)=\frac{12}{5}e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{3}{5}$

4) Soit $f(x)=\ln x-x^2$ $\qquad D_f=\mathbb{R}_+^*$

$\forall x\in]0;+\infty[: f'(x)=\frac{1}{x}-2x=\frac{1-2x^2}{x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-2x^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\underbrace{x=-\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\text{à écarter}}$

Tableau de variations :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	↘	$-\infty$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{1}{2}\approx -0{,}85$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\underbrace{\ln(x)}_{\to-\infty}-\underbrace{x^2}_{\to0}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{x^2}_{\to+\infty}\cdot\left(\underbrace{\frac{\ln(x)}{x^2}}_{\to0}-1\right)=-\infty$

* f est dérivable, continue et strictement croissante sur $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

* $f\left(\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\right)=\left]-\infty;f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right[$

* $-1\in\left]-\infty;f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right[$ $\Rightarrow \exists!\ \alpha\in\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ tq. $f(\alpha)=-1$.

* f est dérivable, continue et strictement décroissante sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$

* $f\left(\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[\right)=\left]-\infty;f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right[$

* $-1\in\left]-\infty;f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right[$ $\Rightarrow \exists!\ \beta\in\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$ tq. $f(\beta)=-1$.

Exercice 4 *(2+2+4=8 points)*

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{e^{\frac{x}{4}}-3}^{\to -2}}{\underbrace{e^x-1}_{\to 0^+}}=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\overbrace{e^{\frac{x}{4}}-3}^{\to -2}}{\underbrace{e^x-1}_{\to 0^-}}=+\infty$

On en déduit que C_f admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

2) $$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{4}}-3}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{4}}\cdot\left(1-\frac{3}{e^{\frac{x}{4}}}\right)}{e^x\cdot\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\overbrace{\frac{3}{e^{\frac{x}{4}}}}^{\to 0}\right)}{\underbrace{e^{\frac{3x}{4}}}_{\to+\infty}\cdot\left(1-\underbrace{\frac{1}{e^x}}_{\to 0}\right)}=0$$

On en déduit que C_f admet une asymptote horizontale (Δ) d'équation $y=0$.

3) $f(x)-0=\frac{e^{\frac{x}{4}}-3}{e^x-1}$

$$f(x)-0=0 \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{x}{4}}-3}{e^x-1}=0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{4}}-3=0 \Leftrightarrow x=4\ln 3$$

L'asymptote (Δ) et C_f se coupent au point $M(4\ln 3;0)$.

Tableau des signes :

x	$-\infty$		0		$4\ln 3$		$+\infty$
$e^{\frac{x}{4}}-3$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{e^{\frac{x}{4}}-3}{e^x-1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Positions relatives :

x	$-\infty$		0		$4\ln 3$		$+\infty$
$f(x)-0$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Position		$C_f/(\Delta)$	$\Vert$	$(\Delta)/C_f$		$C_f/(\Delta)$	

Exercice 5 *(4+5+1+3=13 points)*

1) $\forall x \in]-1;+\infty[$: $f'(x) = 2\ln(x+1)\cdot\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2\ln(x+1)}{\underbrace{x+1}_{>0}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Tableau de variations :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$f(0) = (\ln 1)^2 = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x+1)\right]^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+}\left[\underbrace{\ln(\overbrace{x+1}^{\to 0^+})}_{\to-\infty}\right]^2 = +\infty$$

2) T_a : $y = f'(a)(x-a) + f(a) \Leftrightarrow y = \dfrac{2\ln(a+1)}{a+1}(x-a) + \left(\ln(a+1)\right)^2$

$A(-1;3) \in T_a \Leftrightarrow 3 = \dfrac{2\ln(a+1)}{a+1}\cdot(-1-a) + \left(\ln(a+1)\right)^2 \Leftrightarrow 3 = -2\ln(a+1) + \left(\ln(a+1)\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left(\ln(a+1)\right)^2 - 2\ln(a+1) - 3 = 0$$

Posons $\ln(a+1) = y$: $\quad y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3$ ou $y = -1$

$$\Rightarrow \ln(a+1) = 3 \text{ ou } \ln(a+1) = -1 \Leftrightarrow a = e^3 - 1 \text{ ou } a = \frac{1}{e} - 1$$

On en déduit qu'il existe deux tangentes passant par le point $A(-1;3)$, l'une, appelée (d'), au point d'abscisse $e^3 - 1$, l'autre, appelée (d), au point d'abscisse $\dfrac{1}{e} - 1$.

3) C_f admet une tangente horizontale en $x \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

On en déduit que C_f admet une tangente horizontale en $x = 0$.

4)