

Ministère de l'Éducation nationale et de la Formation professionnelle
EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES
Régime technique – Division technique générale
1^{re} Session 2011

BRANCHE : MATHÉMATIQUES I

DATE: Lundi 23 mai 2011

DURÉE : 2 H 15

Exercice 1 (4+2+2+3=11 points)

- 1) a) Démontrer que pour tout réel a et tout réel b , $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$.
b) En déduire que : $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$ pour tout réel a .
et $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$ pour tout réel a et tout réel b .
- 2) a) Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.
b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$.

Exercice 2 (1+4+3+2=10 points)

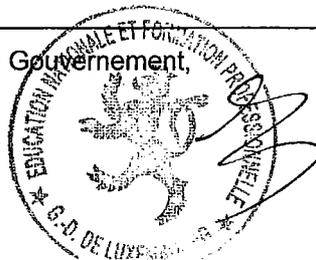
Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

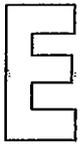
C_f est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

- 1) Déterminer le domaine de définition de f .
2) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et démontrer que la droite (d) d'équation $y = 2x + \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à C_f en $-\infty$.
3) La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Justifier la réponse et interpréter graphiquement le résultat.
4) Calculer $f'(x)$ sur D_f , à préciser.

Exercice 3 (3+3+3+9=18 points)

- 1) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante : $e^{x^2} \cdot (e^{-2})^3 \leq \frac{1}{e} \cdot e^{4x}$.
2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante : $\ln x + \ln 2 = \ln(3x+6) - \ln(x+1)$.
3) Résoudre l'équation différentielle $5y + 2y' - 3 = 0$ et déterminer la solution f telle que $f(0) = 3$.
4) Montrer que l'équation $\ln x - x^2 = -1$ admet exactement deux solutions dans \mathbb{R}_+^* .





Exercice 4 (2+2+4=8 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{e^{\frac{x}{4}} - 3}{e^x - 1}$.

C_f est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

- 1) Déterminer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
- 2) Montrer que C_f admet une asymptote horizontale (Δ) en $+\infty$ et déterminer son équation.
- 3) Étudier la position de C_f par rapport à (Δ) et indiquer les coordonnées de leur point d'intersection M .

Exercice 5 (4+5+1+3=13 points)

Soit f la fonction définie sur $I =]-1; +\infty[$ par $f(x) = [\ln(x+1)]^2$.

C_f est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

- 1) Dresser le tableau de variations complet de f .
- 2) Démontrer qu'il existe deux tangentes (d) et (d') à la courbe C_f passant par le point $A(-1;3)$ et déterminer les abscisses des deux points en lesquels C_f admet une telle tangente. On notera (d) la tangente au point dont l'abscisse est négative.
- 3) C_f admet-elle une tangente horizontale ?
- 4) Construire dans un repère orthonormal (unité : 1cm) la courbe C_f et la tangente (d).

