Corrigé modèle

Maths I
2e session
15 septembre 2011

I) 1. a) voir livre pages 90 et 92
   b) voir livre page 122

II) $f(x) = x - \sqrt{x^2+2x-3}$

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(\underbrace{x}_{-\infty} - \underbrace{\sqrt{x^2+2x-3}}_{+\infty}\big) = -\infty$. pas de A.H. en $-\infty$.
A.O. éventuelle $y = ax+b$ $(a \neq 0)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\underbrace{x}_{+\infty} - \underbrace{\sqrt{x^2+2x-3}}_{+\infty}\big) = F.I.$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-2x+3}{x+\sqrt{x^2+2x-3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}\big(-2+\overbrace{\frac{3}{x}}^{\to 0}\big)}{\cancel{x}\big(1+\sqrt{1+\underbrace{\frac{2}{x}}_{0}-\underbrace{\frac{3}{x^2}}_{0}}\big)} = -1$ A.H. : $y=-1$ en $+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2x-3}-2x-1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\Big[\underbrace{(-x-1)}_{+\infty} - \underbrace{\sqrt{x^2+2x-3}}_{+\infty}\Big] = F.I.$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x^2}+\cancel{2x}+1-\cancel{x^2}-\cancel{2x}+3}{-x-1+\sqrt{x^2+2x-3}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{\underbrace{-x-1+\sqrt{x^2+2x-3}}_{\to+\infty}} = 0$

donc $\Delta : y = 2x+1$ est A.O. en $-\infty$

3. Il faut étudier le signe de $f(x) - y_\Delta = -x-1-\sqrt{x^2+2x-3}$ pour $x \in D_f$.

posons : $-x-1-\sqrt{x^2+2x-3} \leq 0$

$-x-1 \leq \sqrt{x^2+2x-3}$ $\quad |()^2$ condition : $x \leq -1$

$x^2+2x+1 \leq x^2+2x-3$

$1 \leq -3$ impossible

Donc sur $]-\infty;-3]$: $f(x) - y_\Delta > 0$ et C/Δ

$\forall x \in [1;+\infty[$: $f(x) - y_\Delta = \underbrace{-x-1}_{\leq 0}\underbrace{-\sqrt{x^2+2x-3}}_{\leq 0} < 0$ donc Δ/C

4. $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x+3-\sqrt{x^2+2x-3}}{x+3} = \lim\limits_{x\to-3}\left(1 - \dfrac{\overbrace{\sqrt{x^2+2x-3}}^{+\infty}}{\underbrace{x+3}_{+\infty}}\right) = F.I.$

$= \lim\limits_{x\to-3}\left[1 - \dfrac{\cancel{(x+3)}\overbrace{(x-1)}^{\to -4}}{\cancel{(x+3)}\underbrace{\sqrt{x^2+2x-3}}_{0^+}}\right] = +\infty$

f n'est pas dérivable en $x=-3$

C admet une demi-tangente verticale en $x=-3$

III) poser $f(x) = x^2 - 3x + 2\ln x$, $D_f = \mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = 2x - 5 + \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 5x + 2}{\underbrace{x}_{>0}}$

le signe de $f'(x)$ est celui de $(2x^2 - 5x + 2)$. $\Delta = 9$; $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	MAX $f(\frac{1}{2})<0$	↘	MIN $f(2)<0$	↗	$+\infty$

$f(\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4} + 2\ln\frac{1}{2} < 0$

$f(2) = -6 + 2\ln 2 < 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} (\underbrace{(x^2 - 5x)}_{0} + \underbrace{(2\ln x)}_{-\infty}) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\underbrace{(x^2 - 5x)}_{+\infty} + \underbrace{(2\ln x)}_{+\infty}) = +\infty$

- sur $]0;2]$: $f(x) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution
- sur $]2;+\infty[$: f est dérivable, donc continue
  f est strict. ↗
  $0 \in]f(2);+\infty[$

donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]2;+\infty[$

$f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}_+^*$.

$f(4{,}3) \simeq -0{,}09$; $f(4{,}4) \simeq 0{,}32$ donc $4{,}3 < \alpha < 4{,}4$

IV) 1. $\frac{1}{2}\ln x = \ln(2-x) - \ln\sqrt{3x-2}$

- il faut $x > 0$ et $2 - x > 0$ et $3x - 2 > 0$ $\qquad E =]\frac{2}{3};2[$
  $x < 2$ $\qquad x > 2/3$

- $\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln(3x-2) = \ln(2-x)$ $|\cdot 2$
  $\ln[x(3x-2)] = \ln(2-x)^2$
  $3x^2 - 2x = 4 - 4x + x^2$
  $x^2 + x - 2 = 0$; $\Delta = 9$; $\underbrace{x_1 = 1}_{\in E}$; $\underbrace{x_2 = -2}_{\notin E}$

- $S = \{1\}$

2. $2e^{x}-1<e^{-x} \quad |\cdot e^{x}>0$, $E=\mathbb{R}$

$2e^{2x}-e^{x}-1<0$

poser $y=e^{x}>0$. On a : $2y^2-y-1<0$

poser : $2y^2-y-1=0$; $\Delta=9$; $y_1=1$; $y_2=-\frac{1}{2}$

y	0		1		$+\infty$
$2y^2-y-1$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

il faut que : $0<y<1$

$0<e^{x}<1$

$x<0$ donc $S=\mathbb{R}^{*}_{-}$.

V) $f(x)=2e^{2x}-3e^{x}+1$, $x\in\mathbb{R}$

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}-3\underbrace{e^{x}}_{\to 0}+1)=1$ A.H. : $y=1$ en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2\underbrace{e^{2x}}_{\to+\infty}-\underbrace{3e^{x}}_{\to+\infty}+1)=$ F.I.

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{e^{x}}_{\to+\infty}\left(\underbrace{2e^{x}}_{\to+\infty}-3+\underbrace{\frac{1}{e^{x}}}_{\to 0}\right)=+\infty$ pas de A.H. en $+\infty$

A.O. éventuelle $y=ax+b$ $(a\neq 0)$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{2e^{2x}}^{\to+\infty}-\overbrace{3e^{x}}^{\to+\infty}+1}{\underbrace{x}_{\to+\infty}}=$ F.I.

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{e^{x}}{x}}_{\to+\infty\ (\text{c.c.})}\left(\underbrace{2e^{x}}_{\to+\infty}-3+\overbrace{\frac{1}{e^{x}}}^{\to 0}\right)=+\infty$ ($\neq$ valeur finie non nulle)

donc pas de A.O. en $+\infty$.

3. $\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=4e^{2x}-3e^{x}=\underbrace{e^{x}}_{>0}(4e^{x}-3)$

poser : $4e^{x}-3=0$

$e^{x}=\frac{3}{4}$

$x=\ln\frac{3}{4}\simeq-0{,}29$

x	$-\infty$		$\ln\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$ MIN	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\ln\frac{3}{4})=2e^{2\ln\frac{3}{4}}-3e^{\ln\frac{3}{4}}+1=\frac{9}{8}-\frac{9}{4}+1=-\frac{1}{8}$

4. $T: y = f(0) + f'(0)\cdot(x-0)$

$y = 0 + 1\cdot(x-0)$

$y = x$

$f(0) = 2e^0 - 3e^0 + 1 = 0$

$f'(0) = 4e^0 - 3e^0 = 1$

5. poser $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$

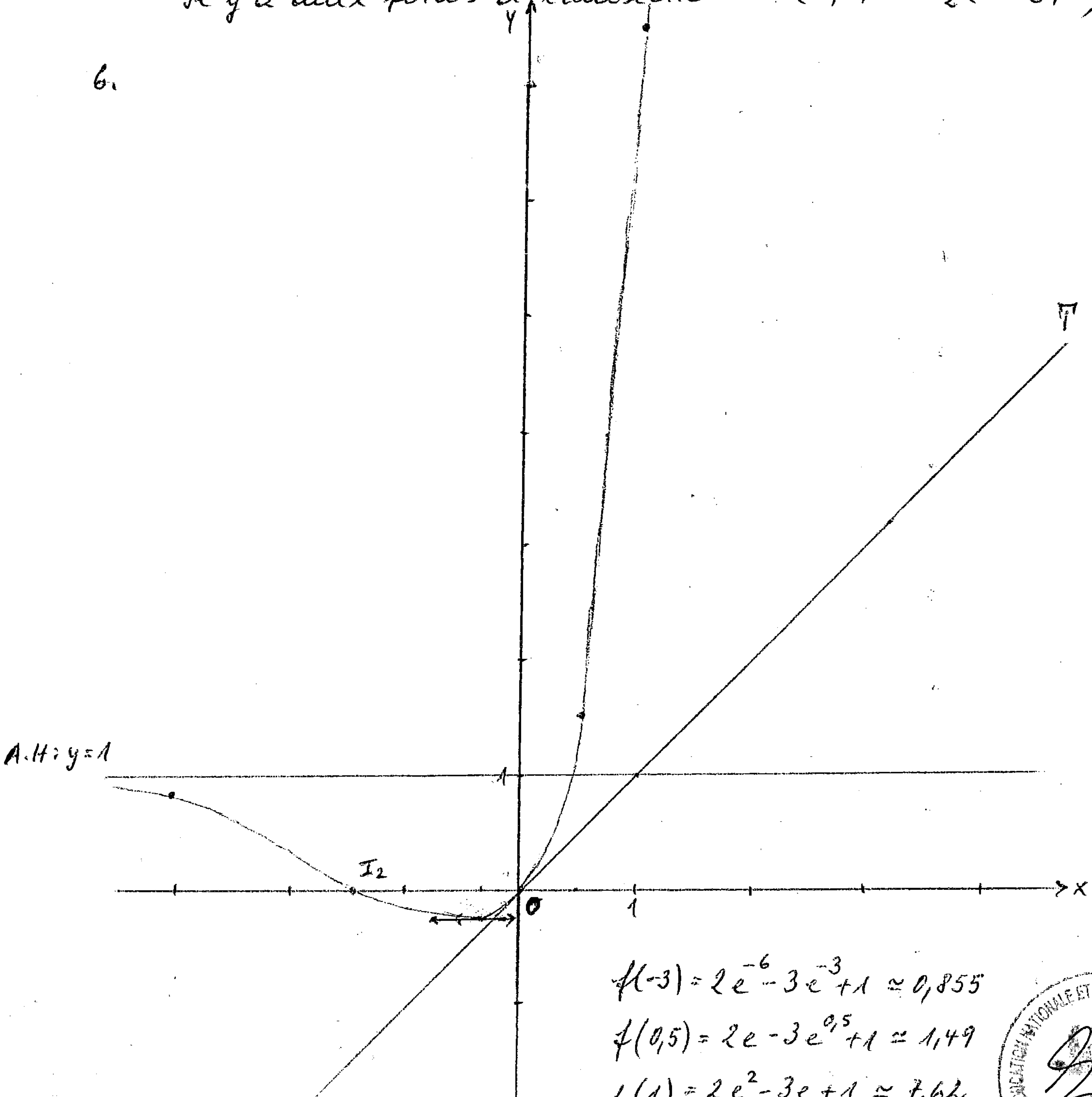
poser $y = e^x$: $2y^2 - 3y + 1 = 0$; $\Delta = 1$; $y_1 = 1$; $y_2 = \frac{1}{2}$

$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\frac{1}{2} \simeq -0{,}7$

Il y a deux points d'intersection $O(0;0)$ et $I_2(\ln\frac{1}{2};0)$

6.



$f(-3) = 2e^{-6} - 3e^{-3} + 1 \simeq 0{,}855$

$f(0{,}5) = 2e - 3e^{0{,}5} + 1 \simeq 1{,}49$

$f(1) = 2e^2 - 3e + 1 \simeq 7{,}62$