Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle

EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES

Régime technique – Division technique générale

Session 2012

BRANCHE : ***Mathématiques I***

DATE : 21 mai 2012 *DUREE :* ***2h 15min***

Question 1

Démontrez les théorèmes suivants :

1. Pour tout réel a et tout réel b : $\exp(a+b)=\exp(a)\cdot\exp(b)$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

8 points (4 + 4)

Question 2

f est la fonction définie sur $\left]-\infty;\frac{1}{4}\right]\cup[1;+\infty[$ par $f(x)=2x+\sqrt{4x^2-5x+1}$.

$\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Prouvez que la droite d_1 d'équation $y=4x-\frac{5}{4}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
2. Calculez la limite de f en $-\infty$. Interprétez graphiquement.
3. Etudiez la dérivabilité de f en 1. Que peut-on en déduire graphiquement ?

11 points (3 + 4 + 4)

Question 3

1. Résolvez l'inéquation suivante : $2\ln(2x-1)-\ln(5-2x)\leq\frac{1}{2}\ln 4$
2. Résolvez l'équation suivante : $e^{2x}+e^{x}=6$

8 points (5 + 3)

La Commissaire du Gouvernement,

Question 4

1. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2x^3+3-6\ln x$.

   a. Etudiez les variations de g. Les limites aux bornes du domaine de définition ne sont pas demandées.

   b. Déduisez-en le signe de g sur $]0;+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x}{3}-1+\dfrac{\ln x}{x^2}$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$

   a. Calculez les limites de f aux bornes du domaine de définition et donnez les équations des asymptotes horizontales ou verticales éventuelles.

   b. Démontrez que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$ dont on détermine une équation.

   c. Etudiez la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de Δ.

   d. Démontrez que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{3x^3}$, pour tout $x\in D_f$.

   e. Déduisez-en le tableau des variations de f.

   f. Représentez graphiquement Δ et $\mathcal{C}_f$.

17 points [(3 + 1) + (2 + 2 + 3 + 2 + 1 + 3)]

Question 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}+2x-1$

1. **a.** Calculez les limites de f aux bornes du domaine de définition.

   b. Dressez le tableau des variations de f.

   c. Indiquez l'équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ en $x=0$.

2. Démontrez qu'il existe une seule tangente à $\mathcal{C}_f$ qui passe par A(0 ; -3).

16 points [(3 + 3 + 1) + 9]

La Commissaire du Gouvernement,