Sections GE / GI

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques I

17 septembre 2012

Question 1 (5 + 5 = 10 points)

Voir cours

Question 2 (6 + 4 = 10 points)

$f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$ $\qquad D_f = \left]-\infty\,;-1\right]$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{\sqrt{x^2-2x-3}}_{\to+\infty}=+\infty$ Donc $\mathscr{C}_f$ n'admet pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.

Etudions l'existence d'une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[-\underbrace{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}_{\to1}\right]$$

$$=-1 \quad (\text{donc } a=-1)$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-3}+x\right) \quad \text{f.i.}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x-3-x^2}{\sqrt{x^2-2x-3}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x-3}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-2-\frac{3}{x}\right)}{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}^{1}\overbrace{\left(-2-\frac{3}{x}\right)}^{\to-2}}{\cancel{x}_{1}\underbrace{\left(-\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-1\right)}_{\to-2}}$$

$$=1 \quad (\text{donc b} = 1)$$

Donc d : $y=-x+1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

b) $$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2-2x-3}-0}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x+1} \quad \Big|\ \Delta=16 \quad x_1=-1 \quad x_2=3$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{(x+1)(x-3)}}{x+1}\cdot\frac{\sqrt{(x+1)(x-3)}}{\sqrt{(x+1)(x-3)}}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)\sqrt{(x+1)(x-3)}}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\overbrace{(x-3)}^{\to-4}}{\underbrace{\sqrt{(x+1)(x-3)}}_{\to0^+}}$$

$$=-\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en -1.

$\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse -1.

ÉDUCATION NATIONALE ET FORMATION PROFESSIONNELLE G.-D. DE LUXEMBOURG

<u>Question 3</u> (3 + 3 + 6 + 3 = 15 points)

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=2x-5-3\ln\dfrac{x}{x+2}$.

a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\left(\underbrace{2x}_{\to0}-5-3\underbrace{\ln\underbrace{\frac{x}{x+2}}_{\to0}}_{\to-\infty}\right)=+\infty$ Donc $\mathscr{C}_f$ admet une A.V. x = 0.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\left(\underbrace{2x}_{\to+\infty}-5-3\underbrace{\ln\underbrace{\frac{x}{x+2}}_{\to1}}_{\to0}\right)=+\infty$ Donc $\mathscr{C}_f$ n'admet pas d'A.H. en $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(2x-5)\big)=\lim\left(-3\underbrace{\ln\frac{x}{x+2}}_{\to0}\right)=0$. Donc $\Delta : y=2x-5$ est une A.O. à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

$\forall x\in\,]0\,;+\infty[\,,\ \varphi(x)=f(x)-y=-3\ln\dfrac{x}{x+2}$

Or $\forall x\in\,]0\,;+\infty[\,,\ x<x+2\Leftrightarrow\dfrac{x}{x+2}<1\Leftrightarrow\ln\left(\dfrac{x}{x+2}\right)<0\Leftrightarrow-3\ln\left(\dfrac{x}{x+2}\right)>0\Leftrightarrow\varphi(x)>0$

Donc $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de l'A.O. Δ sur $]0\,;+\infty[$

c) $D_{f'}=\,]0\,;+\infty[$

$\forall x\in\,]0\,;+\infty[\,,\ f'(x)=2-3\cdot\dfrac{\left(\dfrac{x}{x+2}\right)'}{\dfrac{x}{x+2}}=2-3\cdot\dfrac{\dfrac{2}{(x+2)^2}}{\dfrac{x}{x+2}}=2-3\cdot\dfrac{2}{(x+2)^2}\cdot\dfrac{x+2}{x}=2-\dfrac{6}{x(x+2)}$

$$f'(x)=\frac{2x(x+2)-6}{x(x+2)}=\frac{2x^2+4x-6}{x(x+2)}=\frac{2\left(x^2+2x-3\right)}{x(x+2)}$$

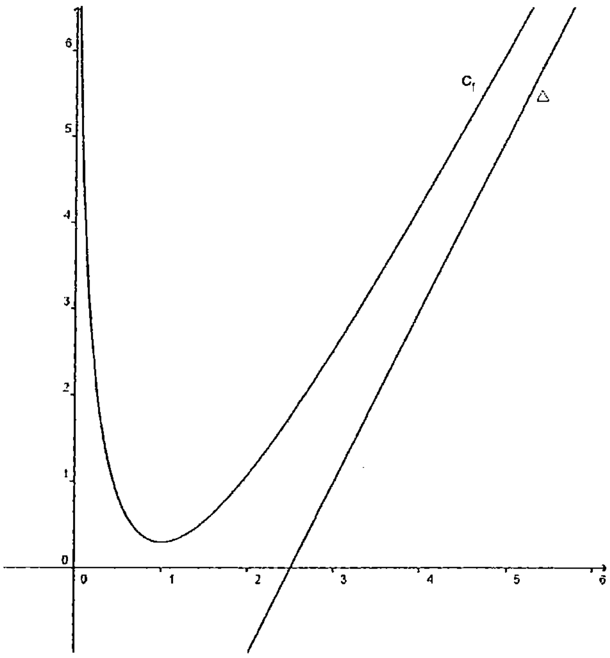
$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+2x-3=0$ $\quad\big|\ \Delta=16\quad x_1=-3\quad x_2=1$

$\Leftrightarrow x=-3\ ou\ x=1$ $\qquad\qquad f(1)=2-5-3\ln\dfrac{1}{3}=-3+3\ln3$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		$+\infty$
x^2+2x-3		+	0	−		−		−	0	+	
$x(x+2)$		+		+	0	−	0	+		+	
f '(x)								−	0	+	
f(x)							$+\infty$	↘	$-3+3\ln3$	↗	$+\infty$

d)



Question 4 (5 points)

$f(x) = (ax+b)\ln x \qquad D_f =]0\,;+\infty[= D_{f'}$

$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad f'(x) = a\ln x + (ax+b)\cdot\dfrac{1}{x}$

D'après la représentation graphique, on a :

① $f'(1) = 2$

$\Leftrightarrow a\cdot\underbrace{\ln 1}_{=0} + (a\cdot 1 + b)\cdot 1 = 2$

$\Leftrightarrow a + b = 2$

② $f'\left(\dfrac{1}{e}\right) = 0$

$\Leftrightarrow a\cdot\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) + (a\cdot\dfrac{1}{e} + b)\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{e}} = 0$

$\Leftrightarrow -a + a + be = 0$

$\Leftrightarrow b = 0$

Donc $a = 2$ et f est donc la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x\ln x$.

Question 5 (3 + 4 + 4 = 11 points)

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cos x - x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\dfrac{\cos x}{x}}_{\to 0} - 1\right) = -1$

car : $\forall x \in]-\infty\,;0[, \quad -1 \le \cos x \le 1 \quad \Big|\cdot\dfrac{1}{\underbrace{x}_{<0}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{x} \ge \dfrac{\cos x}{x} \ge \dfrac{1}{x}$

$\dfrac{-1}{x} \to 0$ et $\dfrac{1}{x} \to 0$ si $x \to -\infty$

Donc, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x} = 0$$

2) $e^x\left(2-3e^{-2x}\right)=5$ $\qquad D=\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2e^x-3e^{-x}-5=0 \quad \Big|\cdot \underbrace{e^x}_{>0}$

$\Leftrightarrow 2e^{2x}-3-5e^x=0$

Posons $y=e^x>0$. Alors l'équation devient :

$2y^2-5y-3=0 \quad \Big| \Delta=49 \quad y_1=3 \quad y_2=-\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2} \quad ou \quad y=3$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^x=-\dfrac{1}{2}}_{impossible} \quad ou \quad e^x=3$

$\Leftrightarrow \qquad x=\ln 3 \qquad S=\{\ln 3\}$

3) a) $2f(x)+f'(x)=4 \Leftrightarrow f'(x)=-2f(x)+4$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle sont les fonctions $f_k(x)=k\cdot e^{-2x}-\dfrac{4}{-2}=ke^{-2x}+2 \quad (k\in\mathbb{R})$

Le point $A(1;3)$ est un point de $\mathcal{C}_f$, donc .

Déterminons k : $\qquad f_k(1)=3$

$\Leftrightarrow k\cdot e^{-2}+2=3$

$\Leftrightarrow k\cdot e^{-2}=1$

$\Leftrightarrow k=e^2$

La fonction cherchée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^2e^{-2x}+2$.

b) $f'(1)=-2e^2e^{-2}=-2$ et $f(1)=3$

Donc $T_1: y=-2(x-1)+3$

$T_1: y=-2x+5$

Question 6 (9 points)

$f(x)=\ln\left(x-e^x+3\right)$ C.E. : $x-e^x+3>0$

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction φ définie par $\varphi(x)=x-e^x+3$.
Il faut déterminer les racines de la fonction φ.

Etudions les variations de la fonction φ :
$\forall x\in\mathbb{R},\quad \varphi'(x)=1-e^x$

On a :

$$\begin{array}{ll} \varphi'(x)=0 & \varphi'(x)>0 \\ \Leftrightarrow 1-e^x=0 & \Leftrightarrow 1-e^x>0 \\ \Leftrightarrow 1=e^x & \Leftrightarrow 1>e^x \\ \Leftrightarrow 0=x & \Leftrightarrow 0>x \end{array}$$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0	−	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

$\varphi(0)=0-1+3=2$

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}\Big(\underbrace{x}_{\to-\infty}-\underbrace{e^x}_{\to0}+3\Big)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{x}_{\to+\infty}\underbrace{\left(1-\underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to+\infty}+\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to0}\right)}_{\to-\infty}\right)=-\infty$$

La fonction φ est continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$

$\varphi(]-\infty\,;0[)=]-\infty\,;2[$ et $0\in]-\infty\,;2[$,

donc l'équation $\varphi(x)=0$ admet une solution réelle unique $\alpha\in]-\infty\,;0[$.

La fonction φ est continue et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$

$\varphi([0\,;+\infty[)=]-\infty\,;2]$ et $0\in]-\infty\,;2]$,

donc l'équation $\varphi(x)=0$ admet une solution réelle unique $\beta\in[0\,;+\infty[$.

D'où le tableau de signe :

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	2	$\searrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$
$\varphi(x)$	−	0	+ +	0	−

Donc D_f = $]\alpha\,;\beta[$ avec $-3<\alpha<-2{,}9$ (car $\varphi(-3)\simeq-0{,}05<0$ et $\varphi(-2{,}9)\simeq0{,}04>0$)

$1{,}5<\beta<1{,}6$ (car $\varphi(1{,}5)\simeq0{,}02>0$ et $\varphi(1{,}6)\simeq-0{,}35<0$)