Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle
EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES
Régime technique – Division technique générale
Session 2012

**BRANCHE :** ***Mathématiques I***

*DATE :* 17 septembre 2012 *DUREE : 2h15*

**Question 1** (5 + 5 = 10 points)

1) Démontrer : la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

2) a) Démontrer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

**Question 2** (6 + 4 = 10 points)

Soit $f$ la fonction définie sur $]-\infty;-1]$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Démontrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique $d$ en $-\infty$ dont on déterminera une équation.

b) Etudier la dérivabilité de $f$ en $-1$. Interpréter graphiquement ce résultat.

**Question 3** (3 + 3 + 6 + 3 = 15 points)

Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x - 5 - 3\ln\dfrac{x}{x+2}$.

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Déterminer les limites de $f$ aux bornes du domaine de définition. Interpréter graphiquement ces résultats.

b) Démontrer que la droite $\Delta$ d'équation $y = 2x - 5$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\Delta$.

c) Dresser le tableau de variations de $f$.

d) Tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormal d'unité 1 cm.

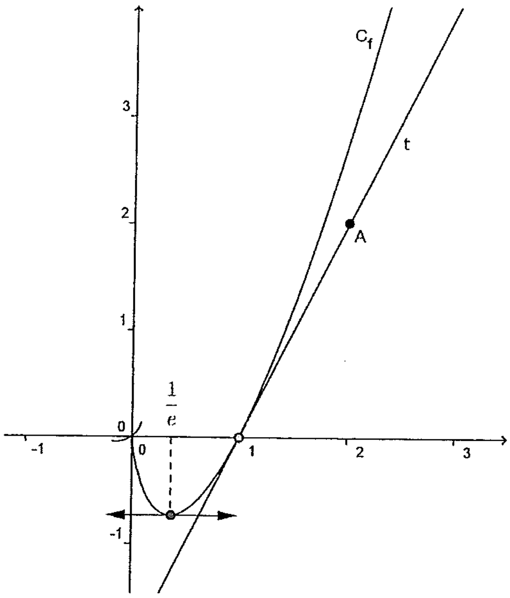
**Question 4** (5 points)

$f$ est une fonction définie sur $I = ]0\,;+\infty[$
par $f(x) = (ax+b)\ln x$, où a et b sont deux réels.

On a tracé ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de $f$ sur $I$.

La droite $t$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
Elle passe par A.

Déterminer $a$ et $b$ à l'aide des renseignements portés sur la figure.




**Question 5** (3 + 4 + 4 = 11 points)

1) Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cos x - x}{x}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $e^x\left(2-3e^{-2x}\right)=5$

3) a) $f$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Déterminer la fonction $f$ telle que :
- pour tout x réel, $2f(x)+f'(x)=4$
- le point $A(1;3)$ est un point de $\mathcal{C}_f$.

b) Trouver une équation de la tangente $T_1$ à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

**Question 6** (9 points)

Soit $f$ la fonction définie par $f(x)=\ln\left(x-e^x+3\right)$.
Démontrer que le domaine de définition de $f$ s'écrit sous la forme $]\alpha\,;\beta[$ ou $]-\infty\,;\alpha[\,\cup\,]\beta\,;+\infty[$ et donner un encadrement d'amplitude $10^{-1}$ de chacune des bornes $\alpha$ et $\beta$.