Code branche	Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES Régime technique – Division technique générale **Session 2012/2013**	
MATHE I		
Épreuve **écrite**	*Branche*	*Section*
Durée épreuve **3 heures**	**Mathématiques I**	**GE / GI**
Date épreuve 23 mai 2013		

Question 1 *(4+2+2=8 points)*

Démontrer :

1) Pour tout réel a et tout réel b, $\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b$.

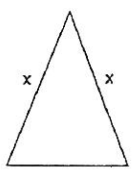
2) Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln ab = \ln a + \ln b$.

3) Pour tout entier $n, n \geq 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Question 2 *(4+3=7 points)*

Un triangle isocèle a un périmètre de 1 dm.

La mesure des deux côtés de même longueur est x (en dm).



1) Indiquer les valeurs possibles de x (déterminer le domaine sans justification)

et montrer que l'aire du triangle est donnée par $A(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)\sqrt{x - \frac{1}{4}}$.

2) Déterminer x pour que l'aire du triangle soit maximale.

Question 3 *(3 points)*

Soient a et b deux réels. On note f la fonction définie sur IR-{-1} par $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x+1}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Déterminer les réels a et b tels que la tangente à C au point d'abscisse 0 ait pour équation : $y = -4x + 1$.

Question 4 *(2 points)*

Résoudre dans IR l'équation suivante : $e^x + 6e^{-x} = 5$.

Question 5 *(2+3+4+3=12 points)*

f est la fonction définie sur $\mathrm{I} =]-1; +\infty[$ par $f(x) = x + 1 - \ln \frac{x+1}{x+3}$ et C est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 2 cm).

1) Déterminer les limites de f aux bornes de I et interpréter graphiquement.
2) Montrer que la droite d d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à C, puis étudier la position de C par rapport à d.
3) Dresser le tableau de variations de f.
4) Tracer d et C.

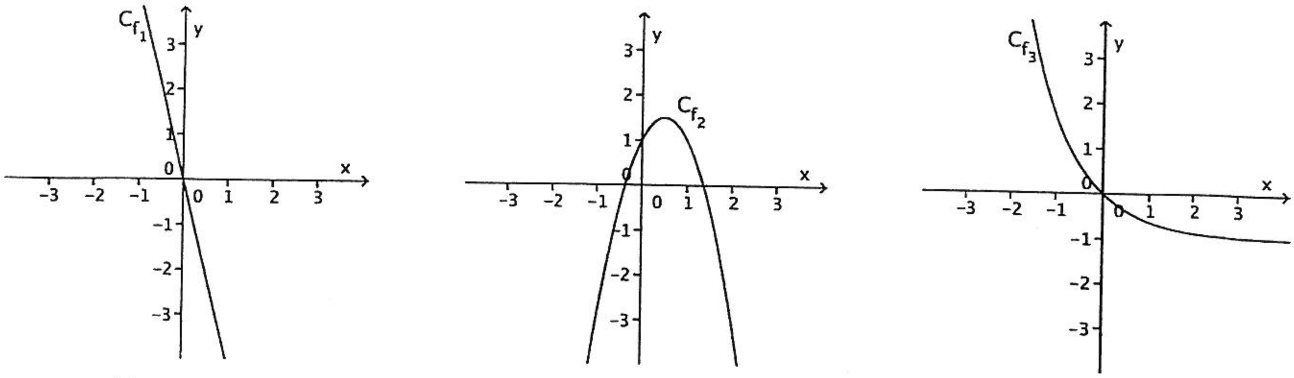
Question 6 *(3+1+7=11 points)*

f est la fonction définie sur IR par $f(x) = x + (1 - x)e^{2x}$.

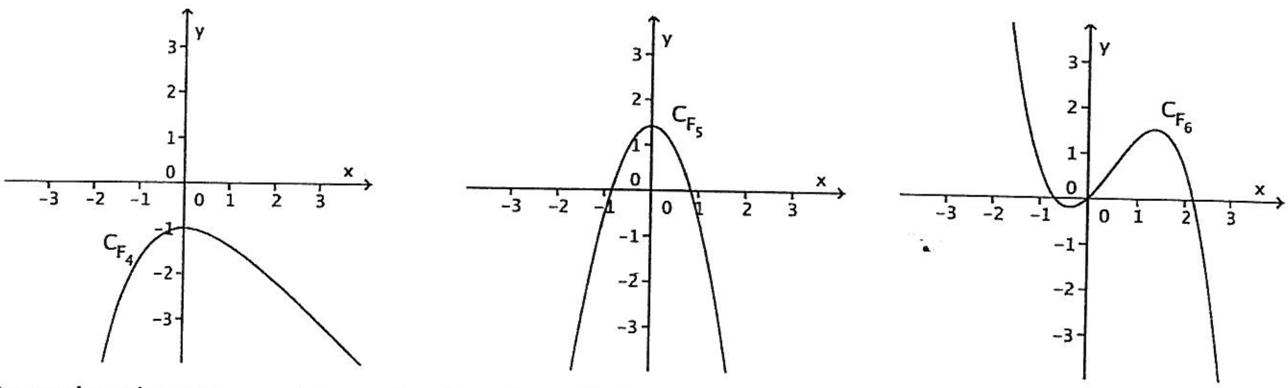
1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Calculer la dérivée de f.
3) Dresser le tableau de variations de f.

Question 7 *(2 points)*

Voici les représentations graphiques de trois fonctions :



Les graphiques suivants représentent des primitives des trois premières fonctions :



Associer chaque graphique des fonctions f_1, f_2 et f_3 au graphique d'une de ses primitives. Justifier.

Question 8 *(3+1=4 points)*

Soient les intégrales suivantes :

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}\,dx \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\sin 2x}{\sin 2x + \cos 2x}\,dx$$

1) Calculer $\mathrm{I} + \mathrm{J}$ et $\mathrm{I} - \mathrm{J}$.

2) En déduire les valeurs exactes de I et de J.

Question 9 *(4 points)*

Calculer l'intégrale suivante à l'aide d'une double intégration par parties :

$\mathrm{K} = \int_0^{-\pi} e^{-x/2} \sin x \, dx.$

Question 10 *(3+4=7 points)*

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;3[$ par $f(x)=\frac{x^2+2x}{3-x}$.

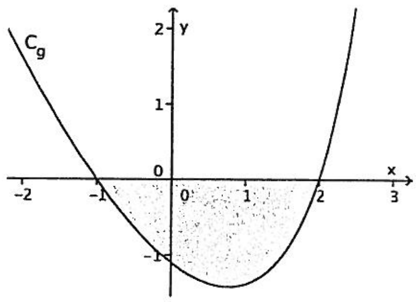
1) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x<3$, $f(x)=ax+b+\frac{c}{3-x}$.

   En déduire une primitive F de f sur $]-\infty;3[$.

2) g est la fonction définie sur $]-\infty;3[$ par $g(x)=-(x+1)\ln(3-x)$.

   Ci-dessous on a représenté une partie de sa courbe dans un repère orthonormal.

   A l'aide d'une intégration par parties et en utilisant les résultats précédents, calculer, en u.a., l'aire du domaine gris.



Corrigé de l'épreuve de mathématiques I

Question 1 (4+2+2 = 8p.)

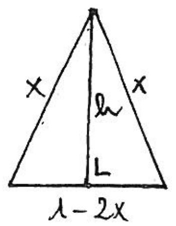
1) th. 3 p. 88

2) th. 3 p. 118

3) th. 5 p. 150

Question 2 (4+3 = 7p.)

1)



$x \in \left] \frac{1}{4} ; \frac{1}{2} \right[$

La base du triangle isocèle mesure $1-2x$ (en dm).
Soit h la mesure de la hauteur en dm.
La hauteur partage le triangle isocèle en deux triangles rectangles symétriques.

Aire du triangle : $\mathcal{A} = \dfrac{(1-2x)\cdot h}{2} = \left(\frac{1}{2} - x\right)\cdot h$

Or (Pythagore) : $h^2 = x^2 - \left(\dfrac{1-2x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{4}\left(1 - 4x + 4x^2\right)$

$= -\frac{1}{4} + x \quad > 0$

Donc $h = \sqrt{-\frac{1}{4} + x}$ et $\mathcal{A}(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)\cdot\sqrt{x - \frac{1}{4}}$.

2) $\forall x \in \left] \frac{1}{4} ; \frac{1}{2} \right[$: $\mathcal{A}'(x) = -\sqrt{x - \frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{2} - x\right)\cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x - \frac{1}{4}}}$

$$= \frac{-2\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - x}{2\sqrt{x - \frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{-3x + 1}{\underbrace{2\sqrt{x - \frac{1}{4}}}_{>0}}$$

x	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$
$\mathcal{A}'(x)$	‖	+	0	−	‖
$\mathcal{A}$	‖	↗	$\mathcal{A}(1/3)$ MAX	↘	‖

L'aire est donc maximale pour $x = \frac{1}{3}$ dm (triangle équilatéral).

Question 3 (3 p.)

T_0 a pour équation $y = -4x+1$ ssi $f'(0) = -4$ et $f(0) = 1$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$: $f'(x) = \dfrac{(2x+a)(x+1) - (x^2+ax+b)}{(x+1)^2}$

$$= \frac{2x^2+2x \cancel{+ax} + a - x^2 \cancel{-ax} - b}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x+a-b}{(x+1)^2}$$

Donc: $\begin{cases} f'(0) = -4 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=-4 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a=-3 \\ b=1 \end{cases}}$

Question 4 (2p.)

$e^x + 6e^{-x} = 5$; $D = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $e^x + 6e^{-x} = 5 \quad | \cdot e^x > 0$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 + 6 = 5e^x$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 6 = 0 \qquad (E)$

Posons $e^x = y$ $(y>0)$.

$y^2 - 5y + 6 = 0$; $\Delta = 1$; $y_1 = 2$; $y_2 = 3$

Donc : $(E) \Leftrightarrow e^x = 2$ ou $e^x = 3$

$\Leftrightarrow x = \ln 2$ ou $x = \ln 3$

$S = \{\ln 2 ; \ln 3\}$

Question 5 (2+3+4+3 = 12p.)

1) $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \Big(\underbrace{x+1}_{\to 0} - \underbrace{\ln \overbrace{\left(\frac{x+1}{x+3}\right)}^{\to 0^+}}_{\to -\infty}\Big) = +\infty$ $\quad \boxed{\text{A.V.: } x=-1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \Big(\underbrace{x+1}_{\to +\infty} - \underbrace{\ln \overbrace{\left(\frac{x+1}{x+3}\right)}^{\to 1}}_{\to 0}\Big) = +\infty$ (pas d'A.H. en $+\infty$)

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[-\ln \overbrace{\left(\frac{x+1}{x+3}\right)}^{\to 1} \right] = 0$

Donc d est A.O. à C en $+\infty$.

<u>Position de C par rapport à d:</u>

$\forall x \in]-1; +\infty[: \quad f(x) - (x+1) = -\ln \frac{x+1}{x+3}$

$\forall x \in]-1; +\infty[: \quad x+1 < x+3 \quad | : (x+3) > 0$ sur $]-1; +\infty[$

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{x+1}{x+3}}_{>0 \text{ sur } I} < 1$

$\Leftrightarrow \ln \frac{x+1}{x+3} < 0$

$\Leftrightarrow -\ln \frac{x+1}{x+3} > 0$

C est donc au-dessus de d.

3) $\forall x \in I : \quad f'(x) = 1 - \frac{\cancel{x+3}}{x+1} \cdot \frac{x+3-(x+1)}{(x+3)^{\cancel{2}}}$

$= 1 - \frac{2}{(x+1)(x+3)}$

$= \frac{x^2+4x+3-2}{(x+1)(x+3)}$

$= \frac{x^2+4x+1}{\underbrace{(x+1)(x+3)}_{>0}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+4x+1 = 0 \qquad \Delta = 12 \qquad x_1 = -2-\sqrt{3} < -1$: à écarter

$x_2 = -2+\sqrt{3} \simeq -0{,}27 \ (\in I)$

x	-1		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f(-2+\sqrt{3})$ min	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-2+\sqrt{3}) = -1+\sqrt{3} - \ln \frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

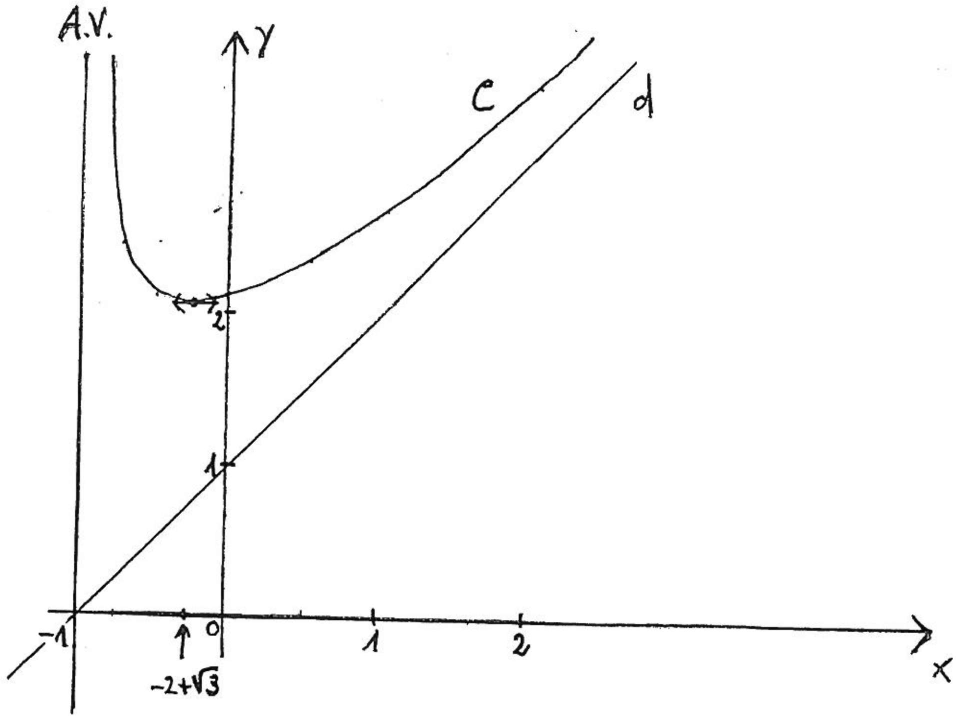
$= -1+\sqrt{3} - \ln \frac{-1+2\sqrt{3}-3}{-2}$

$= -1+\sqrt{3} - \ln(2-\sqrt{3})$

$\simeq 2{,}05$

4)

x	$-0{,}75$	$-0{,}5$	$\simeq -0{,}27$ $-2+\sqrt{3}$	0	$0{,}5$	1	2
$f(x)$	$\simeq 2{,}45$	$\simeq 2{,}11$	$\simeq 2{,}05$	$1+\ln 3$ $\simeq 2{,}1$	$\simeq 2{,}35$	$\simeq 2{,}69$	$\simeq 3{,}51$



Question 6 (3 + 1 + 7 = 11 p.)

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [\underbrace{x}_{-\infty} + \underbrace{(1-x)}_{\to\infty}\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}]$ f.i.: « $\infty \cdot 0$ » $= \lim\limits_{x\to-\infty} (\underbrace{x}_{-\infty} + \underbrace{e^{2x}}_{\to 0} - \frac{1}{2}\cdot \underbrace{2x\,e^{2x}}_{\to 0})$

$= -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [\underbrace{x}_{+\infty} + \underbrace{\underbrace{(1-x)}_{\to-\infty}\underbrace{e^{2x}}_{\to+\infty}}_{\to-\infty}]$ f.i.: « $+\infty - \infty$ » $= \lim\limits_{x\to+\infty} [\underbrace{x}_{+\infty} \cdot \underbrace{(1 + \overbrace{\frac{1-x}{x}}^{\to -1}\underbrace{e^{2x}}_{\to+\infty})}_{\to-\infty}] = -\infty$

ou: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots = \lim\limits_{x\to+\infty} (x + e^{2x} - xe^{2x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} [\underbrace{e^{2x}}_{\to+\infty} \underbrace{(\overbrace{\frac{x}{e^{2x}}}^{\to 0} + 1 - \overbrace{x}^{\to+\infty})}_{\to-\infty}] = -\infty$

$\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2\cdot\underbrace{\frac{e^{2x}}{2x}}_{\to+\infty}} = 0\right)$

2) $\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x) = 1 + (-1)\cdot e^{2x} + (1-x)\cdot 2e^{2x}$
$= 1 - e^{2x} + 2e^{2x} - 2xe^{2x}$
$= 1 + e^{2x} - 2xe^{2x}$
$= 1 + e^{2x}(1-2x)$

3) Signe de f' ?

Posons $g(x) = 1 + e^{2x}(1-2x)$.

$D_g = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = 2e^{2x}(1-2x) + e^{2x}\cdot(-2)$

$= 2e^{2x}(1-2x-1)$

$= -4x \underbrace{e^{2x}}_{>0}$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$			
g	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$g(0) = 1 + 1\cdot(1-0) = 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [1 + \underbrace{e^{2x}}_{\to 0}\underbrace{(1-2x)}_{\to+\infty}] = \lim\limits_{x\to-\infty} (1 + \underbrace{e^{2x}}_{\to 0} - \underbrace{2xe^{2x}}_{\to 0}) = 1$

f.i. : « $0\cdot\infty$ »

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [1 + \underbrace{\underbrace{e^{2x}}_{\to+\infty}\underbrace{(1-2x)}_{\to-\infty}}_{\to-\infty}] = -\infty$

$\forall x \in]-\infty; 0]$: $g(x) > 0$

g est continue et strictement $\searrow$ sur $]0;+\infty[$: $g(]0;+\infty[) =]-\infty; 2[$.

$0 \in]-\infty; 2[$, donc $g(x) = 0$ a exactement une solution α dans $]0;+\infty[$.

$\left.\begin{array}{l} g(0) > 0 \\ g(1) = 1 - e^2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < \alpha < 1$

$\left.\begin{array}{l} g(0,6) \simeq 0,34 > 0 \\ g(0,7) \simeq -0,62 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0,6 < \alpha < 0,7$

D'où : tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$0,6$ α $0,7$		$+\infty$
$f'(x) = g(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$ MAX	$\searrow$	$-\infty$

$(f(\alpha) \simeq 1,9)$

Question 7 (2p.)

* tableau de variations d'une primitive de f_1 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1(x)$		$+$	0	$-$	
F		$\nearrow$	MAX	$\searrow$	

D'après ce tableau de variations, F peut être F_4 ou F_5.
Comme f_1 est définie par $f_1(x) = ax$ $(a \neq 0)$, F est une fonction polynôme du 2^{nd} degré et sa représentation graphique est une parabole.
F_5 est donc une primitive de f_1.

* On a un tableau de variations analogue pour une primitive de f_3.
F_4 doit donc être une primitive de f_3.

* Par conséquent, F_6 est une primitive de f_2.

Question 8 (3 + 1 = 4p.)

1) $$I + J = \int_0^{\pi/8} \frac{\cos 2x + \sin 2x}{\sin 2x + \cos 2x}\, dx = \int_0^{\pi/8} 1\, dx = \left[x \right]_0^{\pi/8} = \frac{\pi}{8}$$

$$I - J = \int_0^{\pi/8} \frac{\cos 2x - \sin 2x}{\sin 2x + \cos 2x}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} \frac{2\cos 2x - 2\sin 2x}{\sin 2x + \cos 2x}\, dx$$
$$= \frac{1}{2} \left[\ln |\sin 2x + \cos 2x| \right]_0^{\pi/8}$$
$$= \frac{1}{2} \left[\ln \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) - \ln (\sin 0 + \cos 0) \right]$$
$$= \frac{1}{2} \left(\ln \sqrt{2} - \underbrace{\ln 1}_{0} \right)$$
$$= \frac{1}{4} \ln 2$$

2) $$\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{8} & (1) \\ I - J = \frac{1}{4} \ln 2 & (2) \end{cases}$$

$(1) + (2)$: $2I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln 2 \Leftrightarrow \underline{I = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} \ln 2}$

$(1) - (2)$: $2J = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2 \Leftrightarrow \underline{J = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} \ln 2}$

Question 9 (4p.)

$$K = \int_0^{-\pi} e^{-x/2} \sin x \, dx$$

Posons : $u(x) = \sin x$; $v'(x) = e^{-x/2}$

$u'(x) = \cos x$; $v(x) = -2e^{-x/2}$

$$= \left[-2e^{-x/2}\sin x\right]_0^{-\pi} + 2\int_0^{-\pi} e^{-x/2}\cos x \, dx$$

$$= 0 + 2\int_0^{-\pi} e^{-x/2}\cos x \, dx$$

Posons : $u_1(x) = \cos x$; $v'(x) = e^{-x/2}$

$u_1'(x) = -\sin x$; $v(x) = -2e^{-x/2}$

$$= 2\left(\left[-2e^{-x/2}\cos x\right]_0^{-\pi} - 2\underbrace{\int_0^{-\pi} e^{-x/2}\sin x \, dx}_{K}\right)$$

D'où : $K = -4\left(-e^{\pi/2} - 1\right) - 4K$

$\Leftrightarrow 5K = 4\left(e^{\pi/2} + 1\right)$

$\Leftrightarrow \underline{K = \frac{4}{5}\left(e^{\pi/2} + 1\right)}$

Question 10 (3+4 = 7 p.)

1)
$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x & -x+3 \\ \hline -x^2 + 3x & -x-5 \\ \hline 5x & \\ -5x + 15 & \\ \hline 15 & \end{array}$$

$\forall x \in \,]-\infty ; 3[\, : f(x) = -x - 5 + \frac{15}{3-x}$

D'où : $\begin{cases} a = -1 \\ b = -5 \\ c = 15 \end{cases}$

$\forall x \in \,]-\infty ; 3[\, : F(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 5x - 15\ln|3-x| = -\frac{1}{2}x^2 - 5x - 15\ln(3-x)$

2) Aire du domaine gris :

$$\mathcal{A} = -\int_{-1}^{2} g(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (x+1)\ln(3-x)\, dx$$

Posons : $u(x) = \ln(3-x)$; $v'(x) = x+1$

$u'(x) = \frac{-1}{3-x}$; $v(x) = \frac{x^2}{2} + x$

$$= \left[\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln(3-x)\right]_{-1}^{2} + \int_{-1}^{2} \frac{\frac{x^2}{2} + x}{3-x}\, dx$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\ln 4 + \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} \frac{x^2 + 2x}{3-x}\, dx$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^2 - 5x - 15\ln(3-x)\right]_{-1}^{2}$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}\left(-2 - 10 + \frac{1}{2} - 5 + 15\ln 4\right)$$

$$= 16\ln 2 - \frac{33}{4}$$

$$\simeq 2{,}84 \text{ u.a.}$$