Code branche	Ministère de l'Education nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES Régime technique – **Session 2013/2014**	
MATHE I		
Épreuve **écrite**	Branche	Division / Section
Durée épreuve **3h**	**Mathématiques I**	**GE GI**
Date épreuve 18/09/2014		

Question I (5+4+1 = 10 points)

a) Démontrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$

b) Démontrer que : La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\forall x\in]0\,;+\infty[$: $(ln)'(x)=\frac{1}{x}$

c) Démontrer que : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$

Question II (3+13 = 16 points)

Partie A : Résoudre l'inéquation : $2\,e^{2x}\ -12\,e^{x}\ +\ 10\geq\ 0$

Partie B : (3+4,5+1,5+4=13 points)

Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x)=e^{2x}-12e^{x}+10x+11$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition. Interpréter le résultat graphiquement.

2) Démontrer que la courbe admet une asymptote oblique Δ en $-\infty$. Etudier la position de Δ par rapport à $\mathcal{C}_f$ sur $]-\infty;0]$.

3) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[2;3]$. Déterminer une valeur approchée de α par défaut à 10^{-2} près.

5) Tracer Δ et $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal (unités : 5 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées)

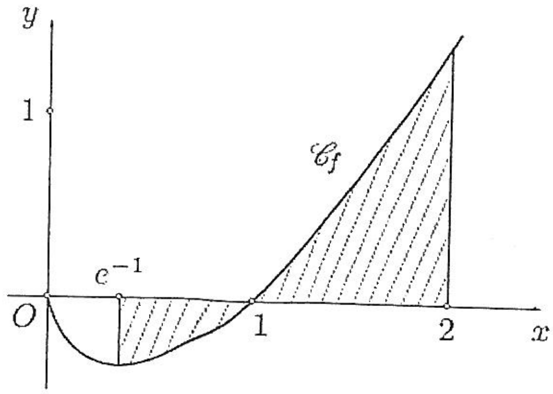
Question III (4 points)

Résoudre l'inéquation : $1+\ln\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)<\ln\left[e\left(x+1\right)\right]$

Le Commissaire du Gouvernement

Question IV (8 points)

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x \cdot lnx$. Elle est représentée par $\mathcal{C}_f$ dans le repère orthonormé ci-dessous.



Calculer l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en u.a., du domaine hachuré ci-contre (délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = e^{-1}$ et $x = 2$).

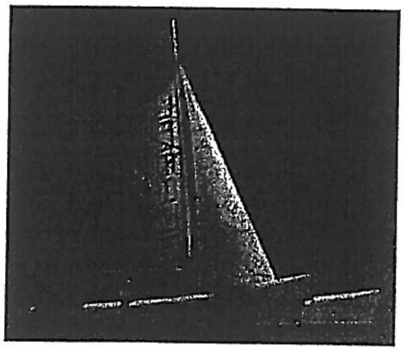
Question V (2+3 = 5 points)

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{t \cdot ln^2(t)} dt$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \cos^3(\pi t) dt$

Question VI (1+4+2 = 7 points)



La photo ci-contre représente un catamaran de course. Le sponsor souhaite faire apparaître son logo sur la voile en position verticale comme le montre la photo ci-contre et que son logo soit le plus visible possible.

La voile est représentée par un triangle ABC, rectangle en B, tel que $AB = 6m$ et $BC = 18m$.

E étant un point du segment [AC]. L et U étant les projetés orthogonaux de E respectivement sur [AB] et [BC], définissant ainsi le rectangle BLEU. On pose $AL = x$ avec $x \in]0; 6[$.

1) Tracer une figure de la situation.

2) Montrer que l'aire du rectangle BLEU peut s'écrire : $A(x) = 18x - 3x^2$

3) Déterminer la position exacte du point L sur le segment [AB] de sorte que l'aire du rectangle soit maximale.

Question VII (10 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x} - 2x + 1$

C_f est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Combien de tangentes à C_f passent par le point $A\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$?

Corrigé – Mathématiques I – 13GE / GI

Question I (voir recueil) (5+4+1 = 10 points)

Question II (3+13 = 16 points)

Partie A (3 points):

$2\,e^{2x} - 12\,e^{x} + 10 \geq 0$

Posons y= e^{x}

Donc résolvons $2y^2 - 12y + 10 \geq 0$

$\Leftrightarrow y \in \left]-\infty; 1\right] \cup \left[5; +\infty\right[$

$\Leftrightarrow y \leq 1$ ou $y \geq 5$

$\Leftrightarrow e^x \leq 1$ ou $e^x \geq 5$

$\Leftrightarrow x \leq \ln(1)$ ou $x \geq \ln(5)$

$\Leftrightarrow x \leq 0$ ou $x \geq \ln(5)$

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta = 12^2 - 4\cdot 2\cdot 10 = 64\\ y_1 = \frac{12-8}{4} = 1\\ y_2 = \frac{12+8}{4} = 5\end{gathered}}$$

$\mathcal{S} = \left]-\infty; 0\right] \cup \left[\ln(5)\,; +\infty\right[$

Partie B : (3+4,5+1,5+4=13 points)

$f(x) = e^{2x} - 12e^{x} + 10x + 11$

1) $\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{e^{2x}}_{\to+\infty}\underbrace{-12e^{x}}_{\to-\infty}\underbrace{+10x}_{\to+\infty} + 11\right]$ $F.I.$ "∞-∞"

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{e^{2x}}_{+\infty}\cdot\left(\underbrace{1\underbrace{-12/e^{x}}_{\to 0}}_{\to 1}\right)\underbrace{+10x}_{\to+\infty} + 11\right]$$

$= +\infty$

La fonction f n'admet pas d'A.H. en $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}\underbrace{-12e^{x}}_{\to 0}\underbrace{+10x}_{\to-\infty} + 11\right] = -\infty$$

f n'admet pas d'A.H. en $-\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{2x}}{x} - \frac{12e^{x}}{x} + 10 + \frac{11}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\frac{e^{x}}{x}}_{\to 0}\cdot\underbrace{e^{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{12e^{x}}{x}}_{\to 0} + 10 + \underbrace{\frac{11}{x}}_{\to 0}\right)$$

$= 10$ donc $a = 10$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - ax]$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}[e^{2x} - 12e^{x} + 10x + 11 - 10x]$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}\underbrace{-12e^{x}}_{\to 0} + 11\right]$

$= 11$ donc $b = 11$

La courbe admet en $-\infty$ une A.O. d'équation $y = 10x + 11$

Position A.O. par rapport à $\mathcal{C}_f$:

Etudions le signe de $f(x) - y$:

$\forall x \in]-\infty; 0]$:

$f(x) - y$
$= e^{2x} - 12e^x + 10x + 11 - 10x - 11$
$= e^{2x} - 12e^x$
$= \underbrace{e^x}_{>0}(e^x - 12)$

$e^x - 12 < 0$
$\Leftrightarrow x < \ln 12$

$f(x) - y < 0 \; ssi \; x < \ln 12$ donc sur $]-\infty; 0]$ la courbe est en-dessous de Δ.

3) $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 2e^{2x} - 12e^x + 10$

De la partie A on peut déduire le signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$		0		$\ln 5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$10\ln 5 - 24$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\ln 5) = e^{2\ln 5} - 12e^{\ln 5} + 10\ln 5 + 11$
$= 25 - 60 + 10\ln 5 + 1$
$= 10\ln 5 - 24$

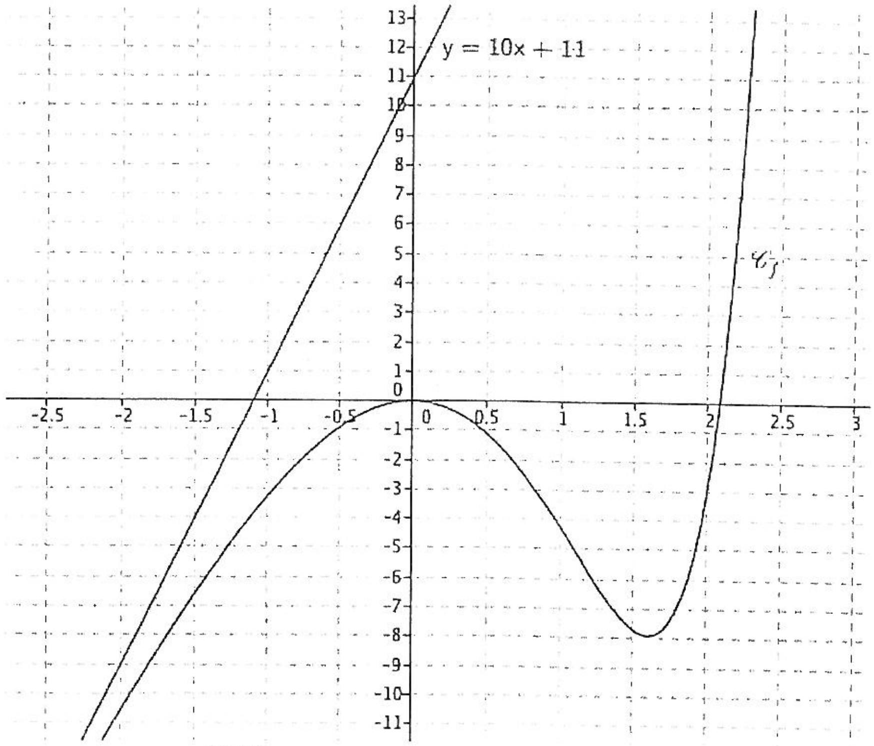
$f(0) = 1 - 12 + 0 + 11 = 0$

4) $f(2) = e^4 - 12e^2 + 31 \approx -3{,}07$
$f(3) = e^6 - 12e^3 + 41 \approx 203{,}4$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictment croissante sur $]2\,;3[$ et $f(2) \cdot f(3) < 0$

Il existe une solution unique α, telle que $f(x) = 0$ sur $]2\,;3[$ et $2{,}08 < \alpha < 2{,}09$

5) Représentation graphique :



Question III : (4 points)

$$1+\ln\left(\frac{2x}{1-x}\right)<\ln[e\cdot(x+1)]$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x}{1-x}\right)-\ln(x+1)<\ln e-1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x}{1-x}\cdot\frac{1}{x+1}\right)<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{1-x}\cdot\frac{1}{x+1}<1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{1-x^2}-1<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-1}{\underbrace{1-x^2}_{>0\ sur\ E}}<0$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-1<0$$

$$S=]0;\ -1+\sqrt{2}[$$

C.E. 1) $x\neq 1$ 2) $\frac{2x}{1-x}>0$ 3) $e\cdot(x+1)>0$

$\Leftrightarrow x\in]0;1[$ $\Leftrightarrow\ x>-1$

$E=]0;1[$

$\Delta=4+4=8$

$$y_1=\frac{-2-2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}\approx -2{,}41$$

$$y_1=\frac{-2+2\sqrt{2}}{2}=-1+\sqrt{2}\approx 0{,}414$$

Question IV : (8 points)

Notons $\mathcal{D}$ le domaine en question. Alors :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\mathcal{D})&=\int_{e^{-1}}^{1}-f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{1}^{2}f(t)\,\mathrm{d}t\\&=-\int_{e^{-1}}^{1}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{1}^{2}f(t)\,\mathrm{d}t\\&=-F(1)+F\left(e^{-1}\right)+F(2)-F(1)\\&=F\left(e^{-1}\right)+F(2)-2F(1),\end{aligned}$$

où F est une primitive de f sur $\left[e^{-1};2\right]$. Soit G une autre primitive de f sur cet intervalle. Elle est (par exemple) définie par :

$$G(x)=\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^x t\ln t\,\mathrm{d}t$$

Intégrons par parties :

$$\begin{array}{|ll}u(t)=\ln t & u'(t)=\frac{1}{t}\\ v'(t)=t & v(t)=\frac{t^2}{2}\end{array}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}G(x)&=\left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_1^x-\int_1^x\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t\\&=\left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_1^x-\left[\frac{t^2}{4}\right]_1^x\\&=\frac{x^2}{2}\ln x-0-\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Choisissons donc pour F :

$$F(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\mathcal{D})&=F\left(e^{-1}\right)+F(2)-2F(1)\\&=-\frac{e^{-2}}{2}-\frac{e^{-2}}{4}+2\ln 2-1-2\left(0-\frac{1}{4}\right)\\&=\boxed{\left(-\frac{3}{4e^2}+2\ln 2-\frac{1}{2}\right)\ \text{u.a.}}\end{aligned}$$

Question V : (2+3 = 5 points)

a) $\int_e^{e^2} \frac{1}{t \cdot ln^2(t)} dt$

$= \int_e^{e^2} \frac{1}{t} \cdot (lnt)^{-2}\, dt$

$= \left[-\frac{1}{lnt}\right]_e^{e^2}$

$= -\frac{1}{2} + 1$

$= \frac{1}{2}$

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos^3(\pi t) dt$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi t) \cdot \cos^2(\pi t) dt$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi t) \cdot \left(1 - \sin^2(\pi t)\right) dt$

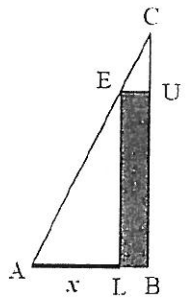
$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\cos(\pi t) - \cos(\pi t) \cdot \sin^2(\pi t)\right)\ dt$

$= \left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi t) - \frac{1}{3\pi}\sin^3(\pi t)\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{3\pi} - 0 + 0$

$= \frac{2}{3\pi}$

Question VI : (1+4+2 = 7 points)



1) →

2) $EL = UB$ et $BL = 6 - x$

Par le théorème de Thalès dans le triangle ABC avec $(EL) \parallel (BC)$:

$\frac{AL}{AB} = \frac{EL}{BC}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{6} = \frac{EL}{18}$

$\Leftrightarrow EL = 3x$

Donc l'aire du rectangle BLEU :

$A(x) = BL \cdot EL$

$\Leftrightarrow A(x) = (6 - x) \cdot 3x$

$\Leftrightarrow A(x) = 18x - 3x^2$

3) La fonction A est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in]0; 6[$: $A'(x) = 18 - 6x = 6(3 - x)$

x	0		3		6
$A'(x)$		+	0	−	
$A(x)$	0	↗	Max	↘	0

$\lim\limits_{x \to 0} A(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 6} A(x) = 0$

Donc l'aire du rectangle est maximale lorsque AL = 3 m, c'est-à-dire L se situe au milieu de $[AB]$.

Question VII (10 points)

$f(x) = e^{3x} - 2x + 1 \qquad D_f = \mathbb{R}$

$M(x_0; f(x_0))$ un point appartenant à C_f. $\qquad \forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 3e^{3x} - 2$

T_{x_0} est la tangente à C_f en M.

$$T_{x_0} \equiv y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = \left(3e^{3x_0} - 2\right)(x - x_0) + e^{3x_0} - 2x_0 + 1$$

$$y = \left(3e^{3x_0} - 2\right)x - 3e^{3x_0} \cdot x_0 + \cancel{2x_0} + e^{3x_0} - \cancel{2x_0} + 1$$

$$\underline{y = \left(3e^{3x_0} - 2\right)x - 3e^{3x_0} \cdot x_0 + e^{3x_0} + 1}$$

$$A \in T_{x_0} \Leftrightarrow 0 = \left(3e^{3x_0} - 2\right)\left(\frac{-1}{3}\right) - 3e^{3x_0} \cdot x_0 + e^{3x_0} + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 = \cancel{-e^{3x_0}} + \frac{2}{3} - 3e^{3x_0} \cdot x_0 \cancel{+e^{3x_0}} + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 = -3e^{3x_0} \cdot x_0 + \frac{5}{3}$$

Posons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3e^{3x} \cdot x + \dfrac{5}{3}$ pour résoudre $g(x) = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = -9e^{3x} \cdot x - 3e^{3x}$$

$$= \underbrace{-3e^{3x}}_{<0}(3x + 1)$$

$$g\left(-\tfrac{1}{3}\right) = -3e^{-1}\left(-\tfrac{1}{3}\right) + \tfrac{5}{3}$$

$$= e^{-1} + \tfrac{5}{3} \approx 2{,}03$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty}\Big(-3\underbrace{e^{3x} \cdot x}_{\to +\infty} + \frac{5}{3}\Big) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty}\Big(-3\underbrace{x \cdot e^{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{\to 0} + \frac{5}{3}\Big) = \frac{5}{3}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$e^{-1} + \frac{5}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

g est continue et strictement croissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[$.

De plus g est strictement positive sur $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[$.

Donc $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[$.

g est continue et strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

De plus $g\left(\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[\right) = \left]-\infty; e^{-1} + \frac{5}{3}\right]$ et $0 \in \left]-\infty; e^{-1} + \frac{5}{3}\right]$.

Donc $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

C_f admet une seule tangente passant par le point $A\left(-\dfrac{1}{3}; 0\right)$