Code branche	Ministère de l'Education nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES Régime technique – **Session 2013/2014**	
MATHE I		
Épreuve **écrite**	Branche	Division / Section
Durée épreuve **3h**	**Mathématiques I**	**GE / GI**
Date épreuve 14.05.2014		

Question I (4+4 = 8 points)

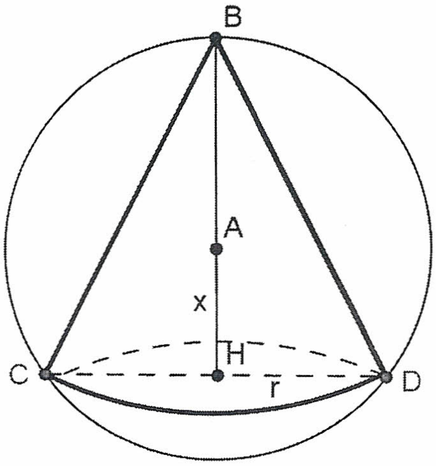
1) Démontrer le théorème suivant :

« Pour tout réel a et tout réel b, $\exp(a+b) = \exp(a)\cdot\exp(b)$ »

2) Démontrer le théorème suivant :

« Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre appartenant à I.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a. »

Question II (3+1+3 = 7 points)



Dans une sphère de centre A et de rayon 6 cm, on inscrit un cône de révolution de rayon r cm et de hauteur BH $\geq$ 6 cm.

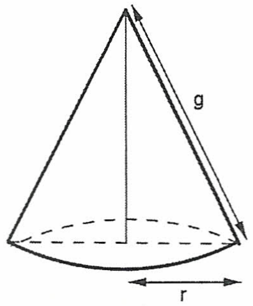
On note x la distance AH exprimée en cm, avec $x \in [0;6[$.

1) Exprimer BH, puis HD et BD en fonction de x.

2) Montrer que l'aire latérale (*) exprimée en cm^2 de ce cône est égale à $A(x) = 2\sqrt{3}\cdot\pi\cdot\sqrt{-x^3-6x^2+36x+216}$

3) Déterminer les dimensions (rayon et hauteur) du cône dont l'aire latérale est maximale.

(*) Pour calculer l'aire latérale du cône, utiliser la formule suivante : $A = \pi\cdot r\cdot g$



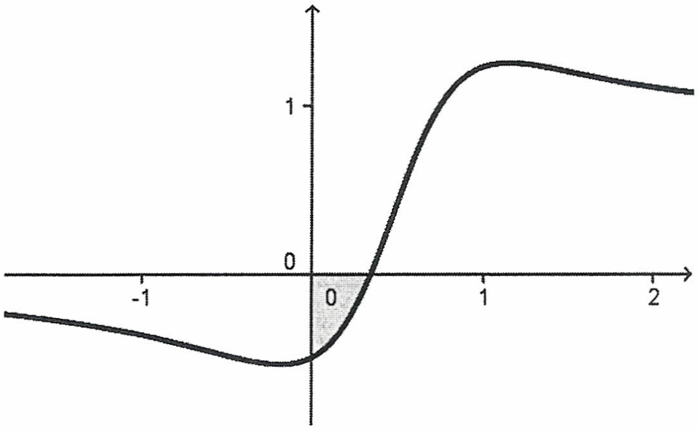
Question III (1+5 = 6 points)

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 (x+1)e^{x^2+2x}dx$$

$$J = \int_0^1 (x^2+2x)e^{x+1}dx$$

Question IV (5+3+2+7+3 = 20 points)



Voici la représentation graphique C_f de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{2x}-2}{e^{2x}-4x+1}$.

1) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que C_f admet deux asymptotes horizontales et écrire pour chacune une équation.
3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{2h(x)}{(e^{2x}-4x+1)^2}$, avec : $h(x) = -4xe^{2x} + 5e^{2x} - 4$.
4) Etudier les variations de la fonction h et en déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β. Encadrer α et β à 0,01 près.
5) Déterminer l'abscisse du point d'intersection I de C_f et de l'axe des abscisses, puis calculer l'aire de la surface grisée.

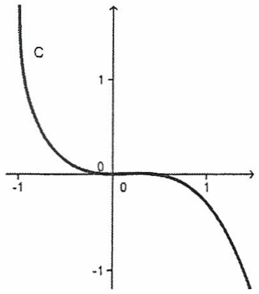
Question V ((1+3)+6+4 = 14 points)

1) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1+\dfrac{\ln(x)}{x-1} & ,\text{si } x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ 4 & ,\text{si } x = 1 \end{cases}$$

   a) Montrer que cette fonction est continue en $x = 1$.
   b) Montrer que la courbe représentative C_f de cette fonction admet deux asymptotes et indiquer pour chacune une équation.

2) Résoudre l'équation suivante : $\ln(x+1) - \ln\sqrt{4-x} = \dfrac{1}{2}\ln(x+3)$.

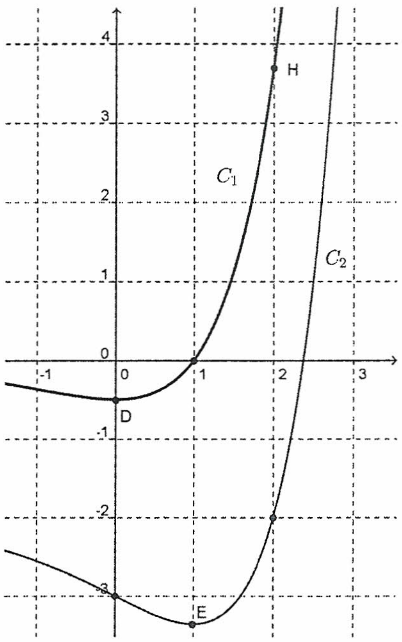


3) La courbe C représente la fonction h définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$h(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2} - 2x^3 + x - \ln(x+1)\right).$$

La fonction h semble être décroissante sur $]-1;+\infty[$.
Est-ce le cas ? Justifier !

Question VI ((2+1)+2 = 5 points)



1) Voici les courbes représentatives d'une fonction f et d'une de ses primitives F.

On sait que la tangente en E à la courbe C_2 est horizontale, que l'ordonnée de D est $-\dfrac{1}{2}$ et que l'ordonnée de H est $\dfrac{e^2}{2}$.

a) Attribuer à chaque fonction la courbe qui convient. Justifier.

b) Calculer : $\int_0^2 f(x)dx$.

2) La courbe C représente la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = ax\ln(x) + bx$, où a et b sont deux nombres réels.

On sait que T est la tangente à C en A.

Déterminer les réels a et b.