

Code branche MATHE I	Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES Régime technique – Session 2015	
Épreuve écrite	Branche	Division / Section
Durée de l'épreuve 3h	Mathématiques 1	GE / GI
Date de l'épreuve 18 mai 2015		

Question 1 (4+5 = 9 points)

Démontrer les théorèmes suivants :

- a) pour tout entier n , $n \geq 1$, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$;
b) pour tout réel a et tout réel b , on a : $\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$.

Question 2 (2+3+4 = 9 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{2 - x}$. Soit C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

- a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.
c) Déterminer la fonction dérivée de f . Mettre le résultat sous forme de fraction irréductible.

Question 3 (4+4 = 8 points)

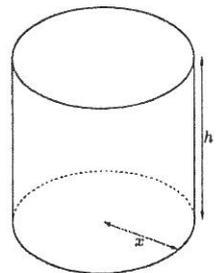
Résoudre dans \mathbb{R} les (in)équations suivantes :

- a) $e^x + 1 - 2e^{-x} \leq 0$.
b) $2\ln(2x - 1) - \ln 4 = \ln(5 - x)$

Question 4 (4+3 = 7 points)

On veut fabriquer des boîtes de conserve cylindriques d'une contenance de 1L en utilisant le moins d'emballage possible. On note x le rayon de la base du cylindre et h sa hauteur.

- a) Montrer que l'aire totale de la boîte est donnée par $A(x) = 2\pi x^2 + \frac{2}{x}$ avec $x > 0$.
b) Déterminer la valeur exacte du rayon de la boîte pour qu'il y ait un minimum d'emballage. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire de cet emballage minimal.



Question 5 (5 points)

Soit C la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x+1) \cdot e^x$.
Montrer qu'il existe deux tangentes à la courbe passant par le point $A(1;0)$.

Question 6 ((3+2+1) + (3+2) = 11 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3 - x - \ln x$.

1. a) Etudier les limites aux bornes du domaine et les variations de f sur $]0;+\infty[$.
b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution réelle α .
c) Étudier le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.
 2. On note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(2 - \ln x)$.
a) Etudier les variations de la fonction g sur $]0;+\infty[$.
b) Montrer que $g(\alpha) = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$.
-

Question 7 (4+3 = 7 points)

Soient les intégrales $I = \int_1^e (2x-1) \ln x \, dx$ et $J = \int_1^e \frac{(2x+1)(x-1) \ln x}{x} \, dx$.

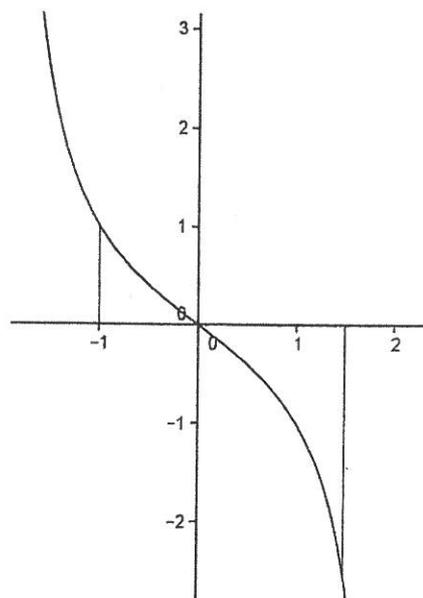
- a) Déterminer la valeur exacte de I .
 - b) Déterminer la valeur exacte de $I - J$. En déduire la valeur exacte de J .
-

Question 8 (4 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -2;2[$ par $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 4}$.

Calculer l'aire de la surface comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = \frac{3}{2}$.

Mettre le résultat sous la forme $a \cdot \ln b$, où a et b sont deux nombres réels strictement positifs.



13GE/GI – Mathématiques I – Corrigé

1. Question de cours. Théorèmes II.7.a page 6 et II.1 page 2.

(4+5 = 9 pts)

2. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{2 - x}$

- a) Conditions d'existence: $x^2 - 2x \geq 0$ et $2 - x \neq 0$
 $\Leftrightarrow x \cdot (x - 2) \geq 0$ et $x \neq 2$
 $\Leftrightarrow x \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$ et $x \neq 2$

$$D_f =]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$$

b) Dérivabilité de f en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x(2 - x)} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{\sqrt{x^2 - 2x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 2x}{x(2 - x)\sqrt{x^2 - 2x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x - 2)x}{x(2 - x)\sqrt{x^2 - 2x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\underbrace{\sqrt{x^2 - 2x}}_{\rightarrow 0^+}} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable en 0. C_f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

- c) $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[:$

$$f'(x) = \frac{(2 - x) \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} - (-1)\sqrt{x^2 - 2x}}{(2 - x)^2}$$

$$= \frac{(2 - x) \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} + \sqrt{x^2 - 2x}}{(2 - x)^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$= \frac{(2 - x)(x - 1) + x^2 - 2x}{(2 - x)^2 \sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$= \frac{2x - x^2 - 2 + x + x^2 - 2x}{(2 - x)^2 \sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x - 2}{(2 - x)^2 \sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{1}{(x - 2)\sqrt{x^2 - 2x}}$$

(2+3+4 = 9 pts)

3. $D = \mathbb{R}$

a) $\forall x \in \mathbb{R} : e^x + 1 - 2e^{-x} \leq 0 \mid e^x > 0$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 + e^x - 2 \leq 0$ On pose: $X = e^x > 0$.

L'inéquation s'écrit: $X^2 + X - 2 \leq 0$

$\Delta = 9 \Rightarrow X_1 = 1$ et $X_2 = -2$ (à rejeter)

Tableau des signes:

X	0	1	$+\infty$
$X^2 + X - 2$		-	+

$\Leftrightarrow X \in]0; 1]$

$\Leftrightarrow e^x \leq 1$

$\Leftrightarrow x \leq 0$

$S =]-\infty; 0]$



b) $2\ln(2x-1) - \ln 4 = \ln(5-x)$

C.E. $2x-1 > 0$ et $5-x > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ et $x < 5$

$D =]\frac{1}{2}; 5[$

$\forall x \in D : 2\ln(2x-1) - \ln 4 = \ln(5-x)$

$\Leftrightarrow \ln(2x-1)^2 = \ln[(5-x) \cdot 4]$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2 = (5-x) \cdot 4$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 20 - 4x$

$\Leftrightarrow 4x^2 = 19$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{19}}{2}$ ou $-\frac{\sqrt{19}}{2}$

$S = \left\{ \frac{\sqrt{19}}{2} \right\}$

(4+4 = 8 pts)

4. a) On a: $V = 1L = 1 \text{ dm}^3$. Donc : $\pi x^2 \cdot h = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{\pi x^2}$.

Alors : $\forall x \in]0; +\infty[: A(x) = 2\pi x^2 + 2\pi xh = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{1}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2}{x}$.

b) $\forall x \in]0; +\infty[: A'(x) = 4\pi x - \frac{2}{x^2}$.

$\forall x \in]0; +\infty[: A'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\pi x - \frac{2}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{4\pi x^3 - 2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4\pi x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{2\pi} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

Tableau de variation:

x	0	$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$	$+\infty$
A'(x)		- 0 +	
A		↘ MIN ↗	

Donc l'emballage est minimal si le rayon de la base du cylindre vaut $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 0,54 \text{ dm}$.

$A_{\min} = A\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right) = 2\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 5,54 \text{ dm}^2$

(4+3 = 7pts)

5. $f : x \mapsto (x+1)e^x$

$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (x+1)e^x + e^x = (x+2)e^x$

Equation de la tangente T_a en un point quelconque d'abscisse a de la courbe:

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$y = (a+2)e^a(x-a) + (a+1)e^a$

$y = (a+2)e^a x - (a^2 + 2a)e^a + (a+1)e^a$

$y = (a+2)e^a x + (-a^2 - a + 1)e^a$

$A(1;0) \in T_a \Leftrightarrow 0 = (a+2)e^a + (-a^2 - a + 1)e^a$

$\Leftrightarrow 0 = (-a^2 + 3)e^a$

$\Leftrightarrow a = \sqrt{3}$ ou $a = -\sqrt{3}$

Aux points d'abscisses $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ respectivement, la courbe admet une tangente passant par A.

(5 pts)



6. $f(x) = 3 - x - \ln x$ $D_f =]0; +\infty[$

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\underbrace{3 - x}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\ln x}_{-\infty} \right) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{3 - x}_{\rightarrow -\infty} - \underbrace{\ln x}_{+\infty} \right) = -\infty$

$\forall x \in D_f : f'(x) = -1 - \frac{1}{x} = \frac{-x-1}{x}$ $\forall x \in D_f : f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x-1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \notin D_f$

Tableau des variations :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
f	$+\infty$ ↘	$-\infty$

b) f est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ avec $0 \in f(]0; +\infty]) =]-\infty; +\infty[$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution réelle $\alpha \in]0; +\infty[$.

c) Tableau des signes :

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

2. $g(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(2 - \ln x)$ $D_g =]0; +\infty[$

a) $\forall x \in D_g : g'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} \cdot (2 - \ln x)$
 $= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$
 $= \frac{-x + 3 - \ln x}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$

Donc le signe de $g'(x)$ est celui de $f(x)$.

Tableau des variations :

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	↗ $g(\alpha)$ ↘		

b) $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 3 - \alpha - \ln \alpha = 0$
 $\Leftrightarrow \ln \alpha = 3 - \alpha$

Alors, on obtient : $g(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(2 - \ln \alpha)$
 $= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(2 - 3 + \alpha)$
 $= \frac{\alpha - 1}{\alpha}(-1 + \alpha)$
 $= \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$

((3+2+1)+(3+2) = 11 points)



$$7. a) I = \int_1^e (2x-1) \ln x \, dx$$

Intégration par parties:

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln x & u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v'(x) &= 2x-1 & v(x) &= x^2 - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc: } I &= \left[(x^2 - x) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2 - x}{x} \, dx \\ &= \left[(e^2 - e) \ln e - 0 \right] - \int_1^e (x-1) \, dx \\ &= e^2 - e - \left[\frac{1}{2} x^2 - x \right]_1^e \\ &= e^2 - e - \left[\frac{1}{2} e^2 - e - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) I - J &= \int_1^e \left[(2x-1) - \frac{(2x+1)(x-1)}{x} \right] \ln x \, dx \\ &= \int_1^e \frac{2x^2 - x - 2x^2 + 2x - x + 1}{x} \ln x \, dx \\ &= \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln^2 x \right]_1^e \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= I - (I - J) \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} e^2 - 1 \end{aligned}$$

(4+3= 7 points)

$$8. A = \int_{-1}^0 f(x) \, dx - \int_0^{\frac{3}{2}} f(x) \, dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^0 \frac{3x}{x^2 - 4} \, dx - \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{3x}{x^2 - 4} \, dx \\ &= \frac{3}{2} \left[\ln|x^2 - 4| \right]_{-1}^0 - \frac{3}{2} \left[\ln|x^2 - 4| \right]_0^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{3}{2} (\ln 4 - \ln 3) - \frac{3}{2} \left(\ln \frac{7}{4} - \ln 4 \right) \\ &= \frac{9}{2} \ln 4 - \frac{3}{2} \ln 21 \\ &= \frac{3}{2} \ln \frac{64}{21} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

(4 points)

