| Code branche<br><br>MATHE I | Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse<br>**EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES**<br>Régime technique – Session 2015 | |
|---|---|---|
| **Épreuve**<br>écrite | Branche | Division / Section |
| Durée de l'épreuve<br><br>**3 h** | **Mathématiques I** | **GE / GI** |
| Date de l'épreuve<br><br>15.09.2015 | | |

---

**Question I** *(3+4+2 = 9 points)*

Démontrer :

a) Pour tout réel $a > 0$ et tout entier relatif $p$, $\quad ln\, a^p = p\, ln\, a$.

b) La fonction $ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in ]0;+\infty[\ :\ (ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$.

c) $\lim\limits_{x \mapsto 1} \dfrac{ln\, x}{x-1} = 1$

---

**Question II** *(4+3 = 7 points)*

La fenêtre normande, formée d'un demi-disque au-dessus d'un rectangle, est encore un élément architectural populaire. Considérons une fenêtre normande dontle périmètre est de 300 *cm*.
$x$ désigne le rayon du demi-cercle de la fenêtre (*en cm*), avec $0 < x < 58$.

1) Démontrer que l'aire d'une telle fenêtre est donnée par : $A(x) = 300x - \left(\dfrac{4+\pi}{2}\right)x^2$.

2) Pour quelle valeur de $x$, l'aire de la fenêtre est-elle maximale (pour laisser entrer le plus de lumière possible) ?

---

**Question III** *(3+3 = 6 points)*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $ln(2x+3) \le ln(x^2+3x+1) - ln\, x$

b) $e^{2x} - 11e^x \ge -28$

---

**Question IV** *(2+2+2+2+3 = 11 points)*

1) Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -e^x - x - 1$.
   a) Étudier le sens de variation de $g$ et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique $\alpha$ dans $\mathbb{R}$ et donner un encadrement de $\alpha$ au dixième près.

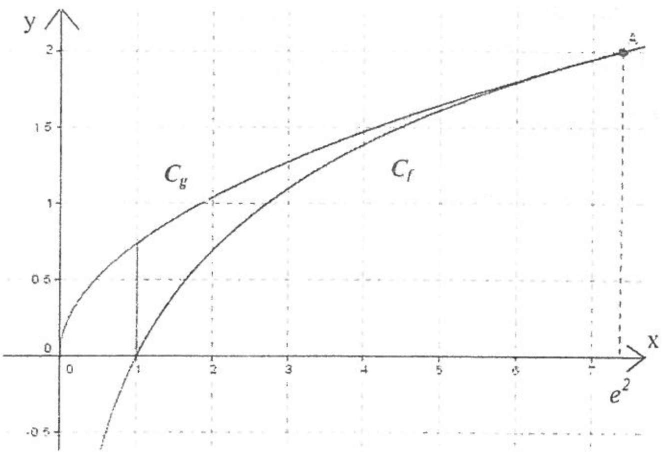
2) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-xe^x}{e^x+1}$ et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
   a) Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$.
   b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x + \dfrac{x}{e^x+1}$.
   En déduire que $C_f$ admet une asymptote oblique $d$ en $+\infty$ dont on donnera une équation.
   c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x \cdot g(x)}{\left(e^x+1\right)^2}$. En déduire le tableau de variation de $f$.

---

**Question V** *(3+2,5+1,5+1=8 points)*

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = \frac{2}{e}\sqrt{x}$ et soient $C_f$ et $C_g$ leurs courbes representatives dans un repère orthonormé.

a) Démontrer que les courbes $C_f$ et $C_g$ ont une tangente commune en $A(e^2 ; 2)$.
b) Déterminer la primitive F de $f$ qui s'annule en 1.
c) Montrer que la fonction G définie sur $]0;+\infty[$ par $G(x) = \frac{4}{3e}x\sqrt{x} - \frac{4}{3e}$ est la primitive de g qui s'annule en 1.
d) Calculer l'aire de la partie colorée ci-dessous.




---

**Question VI** *(2+2 = 4 points)*

Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1+ln x}{x}$ et $C_f$ sa courbe representative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Soit $a > 0$. Donner l'équation réduite de la tangente $T_a$ à $C_f$ au point d'abscisse $a$.

b) Démontrer qu'il existe un seul point $M(a\,;f(a))$ tel que la tangente à $C_f$ en M passe par l'origine. Donner les coordonnées de ce point M.

---

**Question VII** *(2+3 = 5 points)*

"Vrai"ou"faux"? Justifier :

a) La courbe représentative $C_f$ de la fonction $f$ définie sur $[0;2]$ par $f(x)=x\sqrt{2x-x^2}$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 2.

b) L'équation $2x^4-x+1=0$ a exactement deux solutions dans □ .

---

**Question VIII** *(1+2+1 = 4 points)*

On pose $I=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ et $J=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$ .

a) Calculer $I$.

b) Calculer $I + J$.

c) En déduire la valeur de $J$.

---

**Question IX** *(4 points)*

Calculer : $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin(3x)e^x\,dx$

---

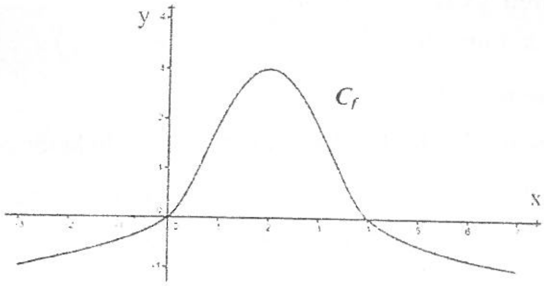
**voir verso**

**Question X** *(2 points)*

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction $f$ définie et continue sur [-3 ;7].

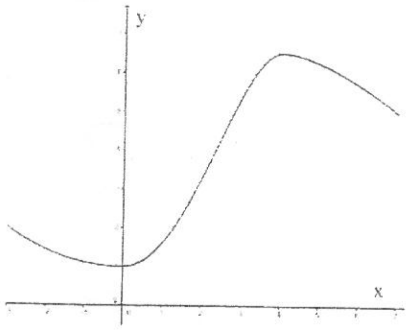
Soit $F$ la fonction définie sur [-3 ;7]

par $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

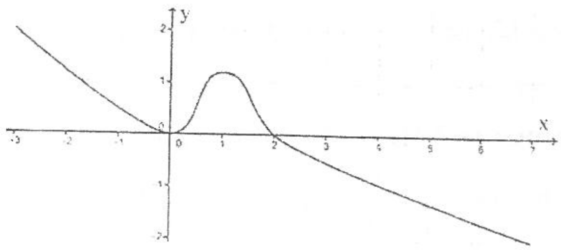



Justifier pourquoi les courbes A et B ne peuvent pas représenter F.

***Courbe A***




***Courbe B***




Le Commissaire du Gouvernement,

# Corrigé – Mathématiques I – Session 2015

## Question I

Voir recueil officiel: théorèmes III.4 page 8 , III.6 page 8 et III.7 page 10.

## Question II

a) $x$ est le rayon du demi-disque (en cm) et $2x$ est la largeur du rectangle (en cm).

Soit $y$ la longueur du rectangle (en cm).

$x \in ]0;58[$

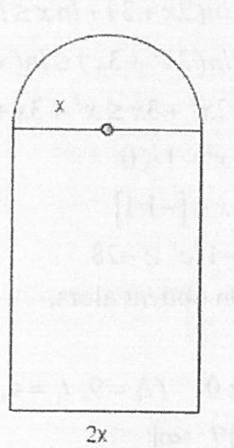
$$A_{fenêtre} = A_{rectangle} + A_{demi-disque}$$

$$P_{fenêtre} = 2y + 2x + \pi x$$

$$\Leftrightarrow 300 = 2y + 2x + \pi x$$

$$\Leftrightarrow 300 - 2x - \pi x = 2y$$

$$\Leftrightarrow 150 - x - \frac{\pi}{2}x = y$$




Ainsi,

$$A(x) = 2x \cdot y + \frac{\pi \cdot x^2}{2}$$

$$= 2x \cdot \left(150 - x - \frac{\pi}{2}x\right) + \frac{\pi}{2}x^2$$

$$= 300x - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)x^2$$

$$= 300x - \left(\frac{4+\pi}{2}\right)x^2$$

b) Soit $A$ la fonction définie sur $]0;58[$ par $A(x) = 300x - \left(\frac{4+\pi}{2}\right)x^2$.

Pour tout $x \in ]0;58[$,

$$A'(x) = 300 - 2x\left(\frac{4+\pi}{2}\right)$$

$$= 300 - x(4+\pi)$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 300 - x(4+\pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow 300 = x(4+\pi)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{300}{4+\pi} \qquad (\cong 42)$$

Tableau des variations

| $x$ | 0 | | $\frac{300}{4+\pi}$ | | 58 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A'(x)$ | ‖ | + | 0 | - | ‖ |
| $A$ | ‖ | ↗ | max | ↘ | ‖ |

L'aire de la fenêtre est maximale lorsque

$$x = \frac{300}{4+\pi} \text{ cm} \left(\text{et } y = 150 - \frac{300}{4+\pi} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{300}{4+\pi} = \frac{300}{4+\pi} \text{ cm}\right).$$

## Question III

a) Conditions d'existence :

$$2x+3>0 \quad \text{et} \quad x^2+3x+1>0 \quad \text{et} \quad x>0$$

$$\Leftrightarrow x>-\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x\in \left]-\infty;\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right[ \cup \left]\frac{-3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right[ \quad \text{et} \quad x>0$$

$$D=]0;+\infty[$$

$$\forall x\in ]0;+\infty[ : ln(2x+3)\leq ln(x^2+3x+1)-ln\,x$$

$$\Leftrightarrow ln(2x+3)+ln\,x\leq ln(x^2+3x+1)$$

$$\Leftrightarrow ln(2x^2+3x)\leq ln(x^2+3x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+3x\leq x^2+3x+1$$

$$\Leftrightarrow x^2-1\leq 0$$

$$\Leftrightarrow x\in[-1;1] \qquad\qquad S=]0;1]$$

b) $\forall x\in \square$ , $e^{2x}-11e^{x}\geq -28$

Posons $t=e^x$ . On obtient alors,

$$t^2-11t\geq -28$$

$$\Leftrightarrow t^2-11t+28\geq 0 \quad (\Delta=9,\ t_1=4,\ t_2=7)$$

$$\Leftrightarrow t\in ]-\infty;4]\cup[7;+\infty[$$

Ainsi, il faut que

$e^x\leq 4$ ou $e^x\geq 7$

$\Leftrightarrow x\leq ln4$ ou $x\geq ln7$

$S=]-\infty;ln4]\cup[ln7;+\infty[$

## Question IV

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\underbrace{e^x}_{\to+\infty}-\underbrace{x}_{\to+\infty}-1\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\underbrace{e^x}_{\to 0}-\underbrace{x}_{\to-\infty}-1\right)=+\infty$

Pour tout x ∈ ℝ,

$g'(x)=-e^x-1=-(e^x+1)<0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Tableau de variation de $g$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | |
| $g$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

b) $g$ est continue et strictement décroissante sur ℝ et l'image de ℝ par $g$ est ℝ.

Comme 0 ∈ ℝ, l'équation $g(x)=0$ a exactement une solution $\alpha$ dans ℝ.

$g(-1,3)\approx 0,027>0$ et $g(-1,2)\approx -0,1<0$

Donc $-1,3<\alpha<-1,2$.

2) a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-xe^x}{e^x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-xe^x}{e^x\left(1+e^{-x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{-x}^{\to-\infty}}{\underbrace{\left(1+e^{-x}\right)}_{\to1}}$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{-xe^x}^{\to0}}{\underbrace{e^x+1}_{\to1}}$$

$$= 0$$

b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad -x + \dfrac{x}{e^x+1} = \dfrac{-xe^x - x + x}{e^x+1} = \dfrac{-xe^x}{e^x+1} = f(x)$

La droite d d'équation y = -x est A.O. à $C_f$ en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-(-x)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-x + \frac{x}{e^x+1} + x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+e^{-x}}}_{\to1}$$

$$= 0$$

Donc $C_f$ admet une asymptote oblique $d$ en $+\infty$ d'équation y = - x.

c)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{\left(-e^x - xe^x\right)\cdot\left(e^x+1\right) - \left(-xe^x\right)\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$= \frac{-e^{2x} - e^x - xe^{2x} - xe^x + xe^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$= \frac{-e^{2x} - xe^x - e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$= \frac{e^x\cdot\left(-e^x - x - 1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$= \underbrace{\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}}_{>0} g(x)$$

Le signe de $f'$ est celui de $g$.

Tableau des signes de $g$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

Tableau des variations de $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $f(\alpha)$ max | $\searrow$ | $-\infty$ |

$f(\alpha) \approx 0.28.$

**Question V**

a) $C_f$ et $C_g$ ont une tangente commune au point d'abscisse $e^2$ ssi
$f'(e^2) = g'(e^2)$ et $f(e^2) = g(e^2)$

Pour tout $x \in ]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g'(x) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

$f'(e^2) = \frac{1}{e^2}$ et $g(e^2) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^2}} = \frac{1}{e^2}$ et $f(e^2) = \ln(e^2) = 2$ et $g(e^2) = \frac{2}{e}\sqrt{e^2} = \frac{2}{e} \cdot e = 2$

Comme $f'(e^2) = g'(e^2)$ et $f(e^2) = g(e^2)$, $C_f$ et $C_g$ ont une tangente commune au point $A(e^2;2)$.

b) $F(x) = \int_1^x \ln t \, dt$ Posons : $u(t) = \ln t$ $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = 1$ $v(t) = t$

Donc $F(x) = [\ln t \cdot t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \cdot t dt = x\ln x - [t]_1^x = x\ln x - x + 1$, avec $c \in \mathbb{R}$.

c) $\forall x \in ]0;+\infty[ :$ $G'(x) = \frac{4}{3e}\left(\sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{4}{3e}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right) = \frac{2}{e}\sqrt{x}$
et $G(1) = \frac{4}{3e} - \frac{4}{3e} = 0$

d) Pour tout $x \in [1; e^2]$, $g(x) \geq f(x)$, donc

$$A = \int_1^{e^2} [g(x) - f(x)] dx = [G(x) - F(x)]_1^{e^2}$$

$$= G(e^2) - F(e^2) - (G(1) - F(1))$$

$$= \frac{4}{3e} e^2 \cdot e - \frac{4}{3e} - (2e^2 - e^2 + 1)$$

$$= \frac{4e^3 - 4 - 3e^3 - 3e}{3e}$$

$$= \frac{e^3 - 3e - 4}{3e}$$

$$\cong 0{,}973 \text{ u.a.}$$

## Question VI

a) Pour tout $x \in ]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ln x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$.

$T_a : y = f'(a)(x-a)+f(a)$

$y = \frac{-\ln a}{a^2}(x-a)+\frac{1+\ln a}{a}$

$y = \frac{-\ln a}{a^2}x+\frac{\ln a}{a}+\frac{1+\ln a}{a}$

$y = \frac{-\ln a}{a^2}x+\frac{1+2\ln a}{a}$

b) $O(0;0) \in T_a \Leftrightarrow 0 = \frac{-\ln a}{a^2}0+\frac{1+2\ln a}{a}$

$\Leftrightarrow 0 = \frac{2\ln a+1}{a}$

$\Leftrightarrow \ln a = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow a = e^{-\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Il existe un seul point M(a ; *f*(a)) tel que la tangente à $C_f$ en M passe par l'origine. C'est le point d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{e^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{2} \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{e}};\frac{\sqrt{e}}{2}\right)$$

## Question VII

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x\sqrt{2x-x^2}}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x(2x-x^2)}{(x-2)\sqrt{2x-x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-x^2(x-2)}{(x-2)\sqrt{2x-x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{\overbrace{-x^2}^{\to 4}}{\underbrace{\sqrt{2x-x^2}}_{\to 0^+}}$

$= -\infty$

Donc $f$ n'est pas dérivable en 2 et $C_f$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse x = 2. Vrai.

b) Soit $f$ la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 2x^4 - x + 1$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $f'(x) = 8x^3 - 1$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

De plus f' est strictement croissante sur ℝ.

Tableau des variations

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | ↘ | $\frac{5}{8}$ | ↗ | |

$f(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{8}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq \frac{5}{8}$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution dans ℝ. Faux.

**Question IX**

a) $$I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{\ln 2}{2} \qquad (1)$$

b)

$$I + J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

c) $I + J = \frac{1}{2} \Leftrightarrow J = \frac{1}{2} - I \quad (2)$

(1) dans (2) : $J = \frac{1}{2} - \frac{ln 2}{2} = \frac{1 - ln 2}{2}$

## Question X

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} sin(3x)e^x \, dx$$

Posons : $u(x) = sin(3x)$ $\quad u'(x) = 3cos(3x)$

$v'(x) = e^x$ $\quad v(x) = e^x$

Ainsi,

$$I = \left[ sin(3x) \cdot e^x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3\,cos(3x) \cdot e^x \, dx$$

$$= -3\int_0^{\frac{\pi}{3}} cos(3x) \cdot e^x \, dx$$

Donc :

$$I = -3\int_0^{\frac{\pi}{3}} cos(3x) \cdot e^x \, dx$$

Posons : $u(x) = cos(3x)$ $\quad u'(x) = -3sin(3x)$

$v'(x) = e^x$ $\quad v(x) = e^x$

$$= -3\left( \left[ cos(3x)e^x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( -3\,sin(3x) \cdot e^x \right) dx \right)$$

$$= -3\left( -e^{\frac{\pi}{3}} - 1 + 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin(3x) \cdot e^x \, dx \right)$$

$$= 3e^{\frac{\pi}{3}} + 3 - 9J$$

D'où, $I = 3e^{\frac{\pi}{3}} + 3 - 9I \Leftrightarrow 10I = 3e^{\frac{\pi}{3}} + 3 \Leftrightarrow I = \frac{3}{10}e^{\frac{\pi}{3}} + \frac{3}{10}$

## Question XI

Tableau des variations de F

| $x$ | $-3$ | | $0$ | | $4$ | | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x) = f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $F$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |

La courbe B ne convient pas car F est croissante sur [0 ; 4].

$F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$ donc la courbe A ne convient pas.